ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

А.Т. Козинова, Н.Н. Ошарина, А.Е. Шахов

Практикум по математике
Динамическое программирование. Теория игр. Системы массового обслуживания. Модели сетевого планирования в управлении

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией финансового факультета для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит» и «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

Нижний Новгород

2007 г.

УДК 519.8(07)
ББК В183.4я73
П69

П69 Козинова А.Т., Ошарина Н.Н, Шахов А.Е. ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ. Динамическое программирование. Теория игр. Системы массового обслуживания. Модели сетевого планирования в управлении: Учебно-методическое пособие./ А.Т. Козинова, Н.Н. Ошарина, А.Е.Шахов, Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. – 72 с.

Рецензент: к.ф.-м. наук Вербус В.А.

В учебном пособии приводится теоретическая справка и разобраны типовые задачи по разделам: метод динамического программирования (оптимальное распределение финансовых ресурсов между предприятиями, планирование сроков замены оборудования), элементы теории игр (парная игра с нулевой суммой), основы теории систем массового обслуживания (с ожиданием и без ожидания), элементы теории графов (ориентированный и неориентированный графы, сетевое планирование комплекса работ). По каждой теме приводится большое количество задач с экономическим содержанием для самостоятельной работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и может обеспечить методическую поддержку практических занятий по математике для студентов, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит» и «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

УДК 519.8(07)
ББК В183.4я73

СОДЕРЖАНИЕ **Стр.**

ВВЕДЕНИЕ **4**
1. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ **5**
1. 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ **5**
1.2. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ **8**
1.2.1. Оптимальное распределение финансовых ресурсов между отраслями (предприятиями) **8**
1.2.2. Определение оптимальных сроков замены устаревшего оборудования **11**
1.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ **14**
2. ТЕОРИЯ ИГР **16**
2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ **16**
2.2. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ПАРНОЙ ИГРЫ **17**
2.3.ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ **28**
3. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ **32**
3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ **32**
3.2. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ **32**
3.2.1. Система массового обслуживания без ожидания (без очереди) **34**
3.2.2. Система массового обслуживания с ожиданием (с неограниченной очередью) **37**
3.2.3. Система массового обслуживания с ограниченной очередью **40**
3.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ **44**
4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ **47**
4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ **47**
4.2. ПОНЯТИЕ СЕТИ **49**
4.2.1. Поток в сети и его свойство **50**
4.2.2. Понятие разреза в сети. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе **51**
4.2.3. Построение максимального потока методом ненасыщенных путей **52**
4.3. ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСА ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ РАБОТ **62**
4.3.1. Основные понятия и определения **62**
4.3.2. Анализ сетевых моделей **64**
4.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ **69**
ЛИТЕРАТУРА

ВВЕДЕНИЕ

Преподавание дисциплины “Математика” для студентов финансового факультета ННГУ им. Н.И.Лобачевского, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит» и «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», строится согласно требованиям, установленным в Государственном стандарте профессионального высшего образования к уровню базовой подготовки экономистов.

В данном учебно-методическом пособии приводятся основные положения, разобраны типовые задачи и предлагаются задания для самостоятельного решения по темам:

- метод динамического программирования (распределение финансовых ресурсов между предприятиями, определение сроков замены оборудования);
- элементы теории игр (парная игра с нулевой суммой);
- основы теории систем массового обслуживания (без очереди, с неограниченной очередью, с ограниченной очередью);
- элементы теории графов (ориентированный и неориентированный графы, поток и разрез в сети, сетевое планирование комплекса взаимосвязанных работ).

Каждая тема содержит разработанные типовые задачи с экономическим содержанием.

Для успешного освоения курса необходимо кроме ознакомления с математическими положениями изучение экономической литературы с точки зрения возможного применения математических методов и моделей при анализе экономических процессов.

Общий курс “Математика” - дисциплина, успешное овладение которой может помочь при изучении других экономических и естественнонаучных дисциплин.

Целью преподавания дисциплины “Математика” является формирование у будущих специалистов представлений о месте и роли математических методов при моделировании экономических процессов.

1. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для эффективного решения некоторого класса задач математического программирования. Этот класс задач характеризуется возможностью естественного, а иногда и искусственного разбиения всей операции на ряд взаимосвязанных этапов (шагов). Термин «динамическое» в названии метода возник потому, что этапы предполагаются разделёнными во времени. Однако этапами могут быть и элементы операции, никак не связанные друг с другом показателем времени. Тем не менее, метод решения подобных многоэтапных задач применяется один и тот же.

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается некоторая динамическая система, набор состояний которой можно пронумеровать. Пусть число шагов равно n.

Обозначим:

S_o – первоначальное (исходное) состояние системы;

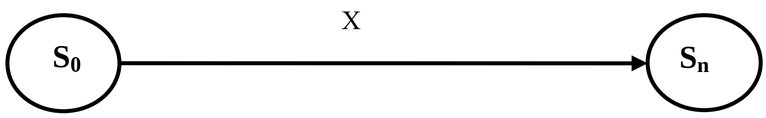
S_k – к – состояние системы;

S_n – конечное состояние системы;

X - совокупность всех шаговых управлений

$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Следовательно, система должна переводится из состояния S_0 в S_n под воздействием пошаговых управлений X, что схематически может быть представлено в виде графа.



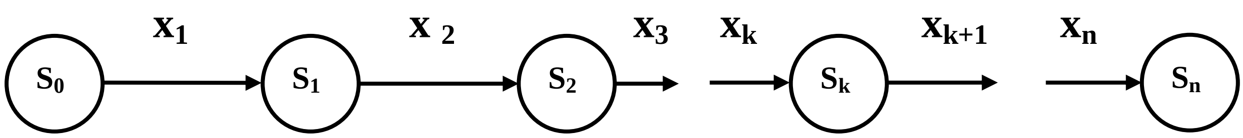
Имеется критерий оптимальности управления системой, который задаётся в виде некоторой числовой характеристики

$$F = F(S_0, X); \quad F \to opt\begin{pmatrix} \max \\ \min \end{pmatrix}$$

Если X^o будет являться оптимальным управлением, тогда

$$F(S_o, X^o) = F^o$$

Управление системой можно разбить на шаги, тогда граф принимает вид:



где $X_i, (i = \overline{1,n})$ - управляющие решения на каждом из шагов.

Сделаем несколько предположений:

1. Состояние S_k системы в конце κ-го шага зависит только от предшествующего состояния S_{k-1} и управления на κ-ом шаге X_k (и не зависит от предшествующих состояний и управлений). Это требование называется «отсутствием последействия». Сформулированное положение записывается в виде уравнений

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1,n}$$

2. Критерий эффективности управления системой представляется в виде аддитивной целевой функции

$$F = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k), \ k = \overline{1,n},$$

где $f_k = f_k(S_{k-1}, X_k)$ – критерий эффективности управления на κ-ом шаге,

Задача динамического программирования (задача пошаговой оптимизации) формулируется так: определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из состояния S_0 в состояние S_n при котором целевая функция F принимает оптимальное значение.

$$F = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k) \to opt$$

Решение задачи динамического программирования осуществляется на основе принципа оптимальности Беллмана, который гласит: ***каково бы ни было состояние системы S_k в результате нескольких шагов управления ею, на ближайшем шаге следует выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с последующими управленческими решениями приводило к оптимальному результату на всех шагах, начиная с данного.***

Принцип оптимальности разработан и верен всегда для всех процессов без обратной связи, а именно таких систем и управлений ими, которые могут быть представлены в виде выше приведённого графа.

Уравнения Беллмана.

Выбор на k-ом шаге, решения X_k влияет на состояние системы S_k и следующие состояния, но среди всех шагов есть один, который может планироваться без «оглядки на будущее». Этот шаг последний. Планируя его нужно сделать предположения о том, чем закончился предпоследний, (n-1) шаг, и для каждого из этих предположений найти условное оптимальное управление Показателем эффективности решения X_n на последнем n шаге является функция

$$f_n(S_{n-1}, X_n),$$

которая должна принимать оптимальное значение при оптимальном управлении X_n^o, т.е.

$Z_n^o = f_n(S_{n-1}, X_n^o) = opt\ f_n(S_{n-1}, X_n)$; n-е уравнение Беллмана

Решая на n-ом шаге задачу условной оптимизации, находится оптимальное управление

$X_n^o = X_n^o(S_{n-1})$

и оптимальное значение целевой функции на данном шаге

$Z_n^o = Z_n^o(S_{n-1})$

Далее рассматривается следующий (n-1) шаг. Снова делаются все возможные предположения о том, чем закончился предыдущий (n-2) шаг, и для каждого из этих предположений находится такое управление на (n-1) шаге, при котором выигрыш за последние два шага (из которых n-й уже оптимизирован) оптимален. В результате оптимизации данного шага получается (n-1) уравнение Беллмана

$Z_{n-1}^o(S_{n-2}) = opt\{f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^o(S_{n-1})\}$,

где $S_{n-1} = f(S_{n-2}, X_{n-1})$

Далее решается задача условной оптимизации и находится оптимальное управление

$X_{n-1}^o = X_{n-1}^o(S_{n-2}),\quad Z_{n-1}^o = Z_{n-1}^o(S_{n-2})$

Затем оптимизируется управление на (n-2) шаге и так далее пока не дойдём до первого шага.

Рассмотрим шаг с номером «k». Здесь в соответствии с предыдущими рассуждениями, нужно отыскать k-е оптимальное управляющее решение и k-е уравнение Беллмана примет вид.

$Z_k^o(S_{k-1}) = opt\{f_k(S_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^o(S_k)\}$,

где $f_k(S_{k-1}, X_k)$ – критерий эффективности k-го шага.

В результате решения будет найдено оптимальное управление и оптимальное значение целевой функции

$X_k^o = X_k^o(S_{k-1}),\quad Z_k^o = Z_k^o(S_{k-1})$

Таким образом, рассмотрев все предыдущие шаги, придём к первому шагу, оптимизируя который получим первое уравнение Беллмана

$Z_1^o(S_0) = opt\{f_1(S_0, X_1) + Z_2(S_1)\}$

Решая задачу условной оптимизации, в результате получим оптимальное управление на первом шаге и оптимальное значение функции цели

$X_1^o = X_1^o(S_0),\quad Z_1^o = Z_1^o(S_0)$

Результатом решения задач условной оптимизации на каждом из шагов будет совокупность оптимальных управляющих решений и оптимальное значение целевой функции

$X^o = (X_1^o, X_2^o, ..., X_n^o)$ и $Z^o = opt\sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k) = Z_1^o(S_o)$

Решая уравнения Беллмана, получим последовательности значений целевой функции и оптимальных управляющих решений:

$Z_n^o(S_{n-1}), Z_{n-1}^o(S_{n-2}), ..., Z_1^o(S_0),\quad X_n^o(S_{n-1}), X_{n-1}(S_{n-2}), ..., X_1^o(S_0)$.

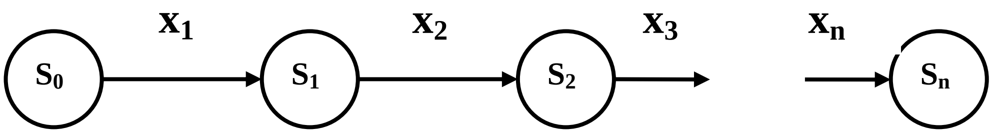
1.2. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К моделям (задачам) динамического программирования можно отнести модель распределения средств между n производственными отраслями (предприятиями) и модель замены физически или морально устаревшего оборудования. Первая из них применяется с целью оптимального распределения средств между отраслями (предприятиями) для получения максимальной совокупной прибыли от вложения средств в них, а вторая для определения оптимальных сроков замены устаревшего оборудования.

1.2.1. Оптимальное распределение финансовых ресурсов между отраслями (предприятиями)

Известно, что прибыль f_k в каждой отрасли (на предприятии) зависит от количества вложенных средств X_k, следовательно $f_k = f_k(X_k)$. Пусть имеется информация об этой зависимости. Введём некоторые ограничения. Вложенные в отрасль (предприятие) средства кратны Δx и не превышают заданной величины d, $X_k \le d, k = \overline{1,n}$, n – количество отраслей (предприятий).

Процесс распределения финансовых ресурсов между экономическими объектами представим в виде графа:



- S_0 – количество средств выделенных для всех предприятий (бюджет);
- $S_1 = S_0 - X_1$ – количество средств подлежащих распределению после того, как первому предприятию будет выделено X_1 средств и т.д.;
- $S_n = S_{n-1} - X_n = 0$ – количество оставшихся средств после того, как они будут распределены между предприятиями.

Следует найти оптимальный вариант распределения средств между предприятиями так, чтобы суммарная прибыль от них была максимальной:

(1.2.1.1) $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$

(1.2.1.2) $F = \sum_{k=1}^{n} f_k(X_k)$

$S_1 = S_0 - X_1 = \varphi_1(S_0, X_1)$

$S_2 = S_1 - X_2 = \varphi_2(S_1, X_2)$

(1.2.1.3) …………………….. (уравнения состояний)

$S_n = S_{n-1} - X_n = \varphi_n(S_{n-1}, X_n)$

$0 \le X_k \le d, \quad k = \overline{1,n}$

Для решения поставленной задачи используем уравнения Беллмана:

$$
(1.2.1.4)\quad
\begin{aligned}
&Z_n^{\,o} = f_n\left(S_{n-1}, X_n^{\,o}\right) = \max\ f_n\left(S_{n-1}, X_n\right)\\
&Z_{n-1}^{\,o}\left(S_{n-2}\right) = \max\left\{f_{n-1}\left(S_{n-2}, X_{n-1}\right) + Z_n^{\,o}\left(S_{n-1}\right)\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_k^{\,o}\left(S_{k-1}\right) = \max\left\{f_k\left(S_{k-1}, X_k\right) + Z_{k+1}^{\,o}\left(S_k\right)\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_1^{\,o}\left(S_0\right) = \max\left\{f_1\left(S_0, X_1\right) + Z_2\left(S_1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Из первого уравнения находим

$$Z_1^{\,o}\left(S_0\right) \to X_1^{\,o}\left(S_0\right) \qquad \text{и} \qquad S_1 = S_0 - X_1^{\,o},$$

из второго уравнения

$$Z_2^{\,o}\left(S_1\right) \to X_2^{\,o}\left(S_1\right) \qquad \text{и} \qquad S_2 = S_1 - X_2^{\,o},$$

из последнего уравнения

$$Z_n^{\,o}\left(S_{n-1}\right) \to X_n^{\,o}\left(S_{n-1}\right) \quad \text{и} \qquad S_n = S_{n-1} - X_n^{\,o}.$$

Из уравнений Беллмана следует, что

$$\max Z = \max \sum_{k=1}^{n} f_k\left(X_k\right) = Z_1^{\,o}\left(S_o\right)$$

Задача 1.2.1. Руководство фирмы изучает предложения по наращиванию производственных мощностей на четырёх принадлежащих фирме предприятиях. На расширение всех предприятий выделяются средства в объёме 6 млн. ед., вложенные средства в предприятия кратны 2 млн. ед. Предприятия представляют на рассмотрение проекты, характеризующиеся величинами доходов связанных с реализацией каждого из проектов. Соответствующие данные представлены в таблице 1.2.1.1. Цель фирмы состоит в получении максимального дохода от инвестиций в размере 6 млн. ед.

Таблица 1.2.1.1.

X	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$	$f_4(X)$
2	2	0	8	10
4	12	8	12	12
6	18	20	16	14

Исходя из условий задачи, процесс распределения средств состоит из четырёх шагов (каждый из шагов – выделение средств тому или иному предприятию). Отсюда имеем n = 4, S_0 = 6 млн. ед., Δx = 2 млн., d =6 млн. ед.

Составим граф задачи для приведённых исходных данных:

$$\boxed{S_0} \xrightarrow{\ \mathbf{x_1}\ } \boxed{S_1} \xrightarrow{\ \mathbf{x_2}\ } \boxed{S_2} \xrightarrow{\ \mathbf{x_3}\ } \boxed{S_3} \xrightarrow{\ \mathbf{x_4}\ } \boxed{S_4}$$

Обозначим X_k – количество средств, выделяемых k-ому предприятию, S_k– количество средств, которое останется после инвестирования средств в каждое предприятие с первого по k-ое.

Запишем вид управления финансовыми средствами

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

и функцию цели, заключающуюся в получении максимальной прибыли, которая складывается из суммы прибылей каждого предприятия

$$F = \sum_{k=1}^{4} f_k(X_k) \to \max F ,$$

а так же уравнения состояний системы

$$S_1 = S_0 - X_1 = \varphi_1(S_0, X_1)$$
$$S_2 = S_1 - X_2 = \varphi_2(S_1, X_2)$$
$$S_3 = S_2 - X_3 = \varphi_3(S_2, X_3)$$
$$S_4 = S_3 - X_4 = \varphi_4(S_3, X_4)$$

Составим уравнения Беллмана для каждого шага

4 шаг: $\kappa = 4, \quad Z_4^o(S_3) = \max\ f_4(X_4), \quad 0 \le X_4 \le \min\{d, S_3\}, \quad S_4 = S_3 - X_4$

3 шаг: $\kappa = 3, \quad Z_3^o(S_2) = \max\{f_3(X_3) + Z_4^o(S_3)\}, \quad 0 \le X_3 \le \min\{d, S_2\}, \quad S_3 = S_2 - X_3$

2 шаг: $\kappa = 2, \quad Z_2^o(S_1) = \max\{f_2(X_2) + Z_3^o(S_2)\}, \quad 0 \le X_2 \le \min\{d, S_1\}, \quad S_2 = S_1 - X_2$

1 шаг: $\kappa = 1, \quad Z_1^o(S_0) = \max\{f_1(X_1) + Z_2^o(S_1)\}, \quad 0 \le X_1 \le \min\{d, S_0\}, , \quad S_1 = S_0 - X_1$

Решив задачи условной оптимизации, найдём значения X_k^o и Z_k^o, $k = 1,2,3,4$.

Вычисления приведены в таблице 1.2.1.2.

Таблица 1.2.1.2.

			k = 4		**k = 3**			**k = 2**			**k = 1**		
S_{k-1}	X_k	S_k	Z_4^o	X_4^o	$f_3(X_3)+Z_4^o(S_3)$	Z_3^o	X_3^o	$f_2(X_2)+Z_3^o(S_2)$	Z_2^o	X_2^o	$f_1(X_1)+Z_2^o(S_1)$	Z_1^o	X_1^o
0	0	0	0	0	0+0=0	0	0	0+0=0	0	0			
2	0	2	10	2	0+10=10	10	0	0+10=10	10	0			
	2	0			8+0=8			0+0=0					
4	0	4	12	4	0+12=12	18	2	0+18=18	18	0			
	2	2		4	8+10=18			0+10=10					
	4	0			12+0=12			8+0+8					
6	0	6	14	6	0+14=14	22	4	0+22=22	22	0	0+22=22	22	0
	2	4			8+12=20			0+18=18			2+18=20		
	4	2			12+10=22			8+10=18			12+10=22		4
	6	0			16+0+16			20+0=20			18+0=18		

Результаты вычислений свидетельствуют о том, что максимальная прибыль (доход) в размере 22 миллионов денежных единиц от вложения 6 млн. ден. ед. инвестиций будет достигаться при двух альтернативных вариантах оптимального распределения средств. По первому варианту $X_I = (0,0,4,2)$ не следует выделять средства первому и второму предприятиям, а третьему и четвёртому выделить 4 и 2 млн. ден. ед. соответственно. По второму варианту $X_{II} = (4{,}0{,}0{,}2)$ не следует инвестировать средства во второе и третье предприятия, а первому и четвёртому выделить 4 и 2 млн. ден. ед. соответственно.

1.2.2. Определение оптимальных сроков замены устаревшего оборудования

Критерий оптимальности может быть различным, либо это максимальная прибыль от эксплуатации, либо минимальные суммарные издержки от эксплуатации оборудования в течение планируемого периода.

Принимаются следующие предположения (допущения):

- Решение о замене устаревшего оборудования принимается в начале единичного, равного промежутка времени (год, квартал, месяц и т. д.).
- Оборудование может использоваться неограниченно долго, но оно эксплуатируется конкретное число, n промежутков времени.
- Основная характеристика состояния оборудования – его возраст t, управление на каждом промежутке времени состоит из принимаемого решения, либо сохранить X_i^C, либо заменить $X_i^З$, $i = \overline{1,n}$.

Каждое решение будет связано с определённым критерием эффективности. Общий показатель носит аддитивный характер, т.е. складывается из показателей эффективности на всех промежутках эксплуатации оборудования. Алгоритм оптимизации такой модели рассмотрим на конкретном примере.

Задача 1.2.2. Известно, что срок эксплуатации оборудования (промежуток времени, в течение которого рассматривается задача оптимального планирования сроков эксплуатации и замены старого оборудования) равен 5 лет. Стоимость оборудования $P_0(i)$, зависит от момента (года) приобретения оборудования $i = 0,1,...,n-1$. Известна ликвидная стоимость оборудования заданная функцией $\varphi(t)$, $t = 1,2,...,n$. Так же известна стоимость эксплуатации оборудования в течение года $r(t)$, $t = 1,2,...,n-1$.

Таблица 1.2.2.1.

i, t	$\varphi(t)$	$r(t)$	$P_0(i)$
0	-	10	100
1	80	30	120
2	60	50	140
3	40	70	160
4	20	90	180
5	10	-	-

Следует выбрать управление $X = (X_1, X_2, ..., X_5)$, где, $X_1, X_2, ..., X_5$ – решение, принимаемое в начале каждого года. Цель заключается в минимизации затрат на приобретение и эксплуатацию оборудования в течение 5 лет.

Модель задачи принимает вид.

(1.2.2.1) $X = (x_1, x_2, ..., x_5)$

(1.2.2.2) $F = \sum_{i=1}^{5} f_i(X_i, t) \to \min F$

(1.2.2.3) $S_i = \begin{cases} 1, X_i = X^З \\ t+1, X_i = X^C \end{cases}, \ i = \overline{1,5}$, (уравнения состояний).

Составим соотношения Беллмана.

(1.2.2.4) $i = 5; X_5 = ?: Z_5^o(t) = \min \begin{cases} r(t) - \varphi(t+1), X_i = X_i^C \\ -\varphi(t) + P_0(4) + r(0) - \varphi(1), X_i = X_i^З \end{cases}$

(1.2.2.5) $i = 4; X_4 = ?: Z_4^o(t) = \min \begin{cases} r(t) + Z_5^O(t+1), X_i = X_i^C \\ -\varphi(t) + P_O(3) + r(0) + Z_5^O(1), X_i = X_i^З \end{cases}$

(1.2.2.6) $i = 2,3; X_i = ?: Z_i^o(t) = \min \begin{cases} r(t) + Z_{i+1}^O(t+1), X_i = X_i^C \\ -\varphi(t) + P_O(i-1) + r(0) + Z_{i+1}^O(1), X_i = X_i^З \end{cases}$

(1.2.2.7) $i = 1; X_1 = ?: Z_1(0) = \min \{P_0(0) + r(0) + Z_2(1)\}$

Решение представим в графическом виде (рис. 1.2.2.1).

На рисунке по оси абсцисс отложены пять шагов оптимизации, $i = \overline{0,5}$, по оси ординат возраст оборудования $t = \overline{0,5}$, очевидно, что каждому шагу оптимизации соответствует определённый возраст оборудования. Дуга показывает переход из одного состояния в другое в результате конкретного управленческого решения. Над дугой указана величина суммарных затрат предприятия по реализации управленческого решения.

Количественной характеристикой каждой вершины графа является величина $Z_i^o(t)$, вычисляемая по одной из формул (1.2.2.4),…,(1.2.2.7), которая указана в соответствующей вершине графа, внутри прямоугольника.

Дуги, определяющие $Z_i^o(t)$, выделены жирно. Непрерывная последовательность выделенных дуг, составляющих полные пути (от исходного до завершающего состояния), определяют оптимальные варианты затрат на приобретение и эксплуатацию оборудования с последующей его ликвидацией (продажей).

Минимальные расходы с учётом приобретения оборудования и последующей его ликвидацией составляют $Z_1^o(0) = 270$ ден. ед., при этом существует три варианта оптимального управления процессом:

вариант 1, $X_I^o = (X_1^C, X_2^C, X_3^З, X_4^C, X_5^C)$;

вариант 2, $X_{II}^o = (X_1^C, X_2^З, X_3^C, X_4^З, X_5^C)$;

вариант 3, $X_{III}^o = (X_1^C, X_2^З, X_3^З, X_4^C, X_5^C)$.

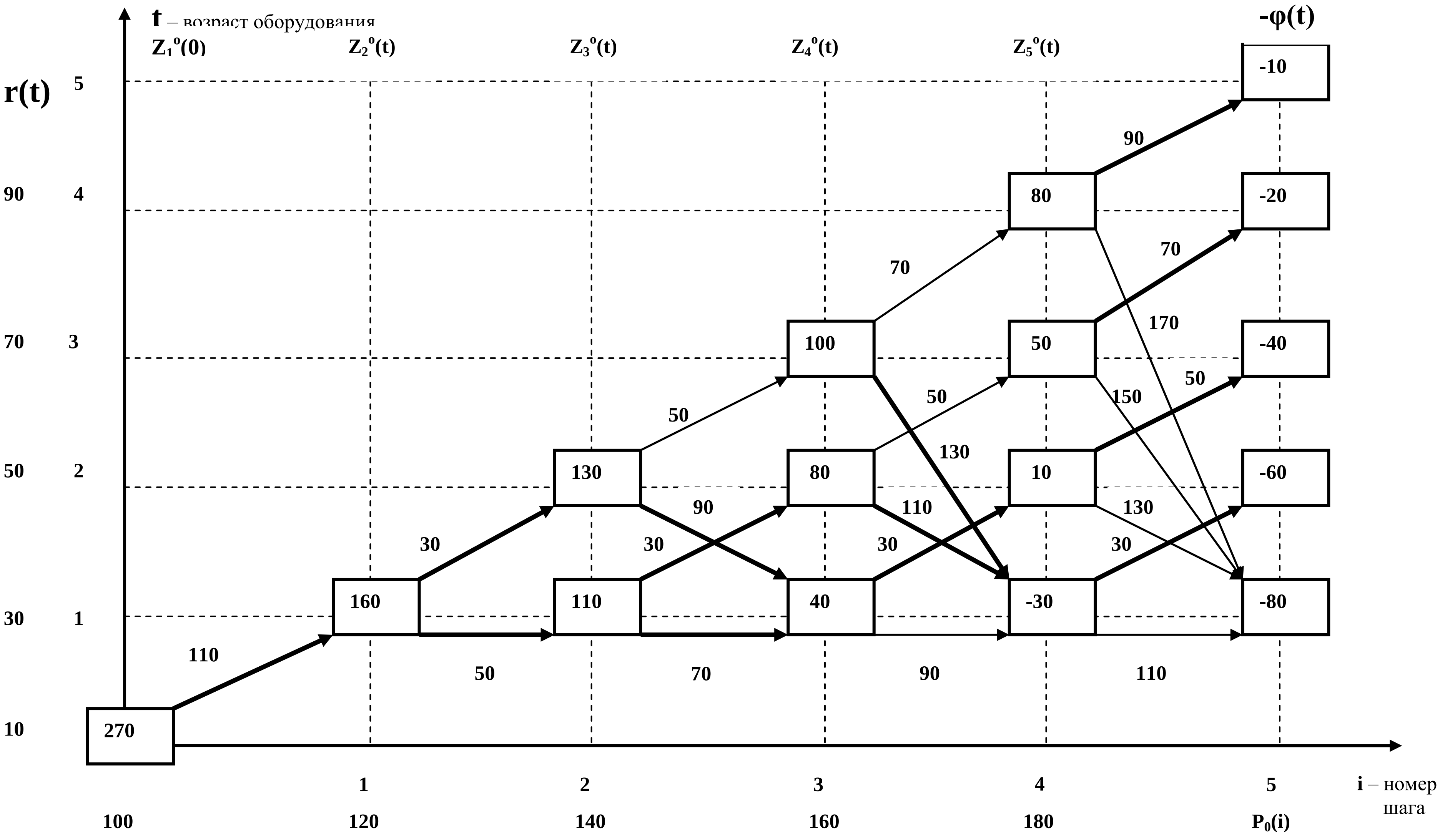


Рис. 2.2.1. График условной оптимизации модели динамического программирования (замена оборудования).

1.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.3.1. Используя метод динамического программирования, составить модель и найти решение задачи оптимального распределения средств "S_0" между "n" предприятиями. Критерий – максимальная прибыль. Средства "X" выделенные $к$ – тому предприятию приносят прибыль "$f_k(X)$", вложенные средства кратны "ΔX" и не превышают "d" для $к$ – того предприятия. Задания представлены в таблицах

№ 1.3.1.1

S_0=15; n=3; Δx=3; d=9			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
3	18	20	22
6	30	28	26
9	35	33	37

№ 1.3.1.2

S_0=5; n=3; Δx=1; d=3			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	12	12	18
2	14	14	18
3	15	20	22

№ 1.3.1.3

S_0=10; n=3; Δx=2; d=6			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
2	18	20	12
4	36	40	16
6	62	55	17

№ 1.3.1.4

S_0=20; n=3; Δx=4; d=12			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
4	28	20	25
8	40	50	45
12	62	75	65

№ 1.3.1.5

S_0=25; n=3; Δx=5; d=15			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
5	8	10	12
10	20	18	16
15	25	23	27

№ 1.3.1.6

S_0=15; n=3; Δx=5; d=15			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
5	28	20	20
10	33	24	29
15	36	32	37

№ 1.3.1.7

S_0=5; n=3; Δx=1; d=3			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	7	11	9
2	14	14	12
3	21	25	23

№ 1.3.1.8

S_0=12; n=3; Δx=3; d=9			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
3	26	19	21
6	31	23	26
9	34	35	38

№ 1.3.1.9

S_0=12; n=3; Δx=2; d=6			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
2	10	12	9
4	14	14	16
6	28	25	23

№ 1.3.1.10

S_0=0,3; n=3; Δx=0,1; d=0,3			
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0,1	8	10	12
0,2	10	18	16
0,3	15	23	17

Задача 1.3.2. Используя метод динамического программирования определить, оптимальные сроки замены оборудования Критерий – минимальные расходы. Задания представлены в таблицах. Обозначения: i – возраст фирмы, t – возраст оборудования, $P_0(i)$ – цена оборудования в i – том году, $r(t)$ – расходы на эксплуатацию оборудования в течение года, $\varphi(t)$ – ликвидационная стоимость оборудования.

№ 1.3.2.1.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	60	180
1	140	70	180
2	110	80	180
3	80	90	180
4	50	100	180
5	20	-	-

№ 1.3.2.2.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	50	200
1	150	60	210
2	120	70	190
3	70	80	180
4	40	100	170
5	20	-	-

№ 1.3.2.3.

t, i	3	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	70	210
1	160	80	220
2	130	90	190
3	90	100	200
4	70	110	240
5	30	-	-

№ 1.3.2.4.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	80	260
1	170	90	280
2	150	100	240
3	70	110	190
4	60	120	100
5	10	-	-

№ 1.3.2.5.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	40	220
1	120	50	210
2	100	100	200
3	80	120	280
4	40	140	190
5	20	-	-

№ 1.3.2.6.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	60	250
1	130	70	230
2	120	80	200
3	100	90	190
4	90	100	100
5	40	-	-

№ 1.3.2.7.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	70	200
1	180	90	190
2	160	100	180
3	100	120	200
4	80	140	160
5	60	-	-

№ 1.3.2.8.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	80	270
1	150	90	240
2	140	110	210
3	120	130	190
4	90	170	180
5	70	-	-

№ 1.3.2.9.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	60	230
1	140	80	210
2	120	120	190
3	90	130	160
4	70	160	110
5	40	-	-

№ 1.3.2.10.

t, i	$\varphi(t)$	$r(t)$	$p_0(i)$
0	-	90	180
1	200	100	140
2	180	110	170
3	150	130	130
4	100	170	100
5	80	-	-

2. ТЕОРИЯ ИГР

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под игрой понимается конфликтная ситуация, в которой стороны (игроки) преследуют различные цели, причем результат любого действия каждой из сторон зависит от мероприятий других сторон. Цель игры – выигрыш. В экономике такие ситуации возникают при взаимоотношениях поставщиков и потребителей, конкурирующих предприятий и т. д.

Ход игрока – выбор действия, обусловленного правилами игры. Ход может быть сознательным (личный ход) или случайным.

Стратегия игрока – совокупность правил, определяющих выбор ходов.

Оптимальная стратегия – стратегия, которая обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (минимальный средний проигрыш) при многократном повторении игры.

Игра называется конечной, если игроки имеют конечное число стратегий.

Цель моделирования, согласно теории игр, – определение оптимальных стратегий игроков при наличии у них «разумного поведения», т.е. стремления помешать противникам в достижении их целей.

Математическая модель игры включает:

- ✓ исход конфликта (выигрыш, проигрыш),
- ✓ условия игры (правила: варианты действий игроков, объем информации о противниках, выигрыш в результате того или иного хода).

Парная игра – игра с двумя игроками (A и B).

Парная игра с нулевой суммой – игра, в которой выигрыш одного совпадает с проигрышем другого игрока.

Платежная матрица парной игры с нулевой суммой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент платежной матрицы a_{ij} – выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, когда другой игрок использует стратегию B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Упрощение игры – удаление заведомо невыгодных стратегий игроков. Для игрока A стратегия A_s хуже A_k, если $a_{sj} \le a_{kj}$, $\forall j=\overline{1,n}$. Для игрока B стратегия B_s хуже B_k, если $a_{is} \ge a_{ik}$, $\forall i=\overline{1,m}$.

Цена игры v – средний выигрыш игрока A при многократном повторении игры.

Оптимальная цена игры v^o – максимальный средний выигрыш игрока A при многократном повторении игры.

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \left\{ \min\limits_{j=\overline{1,n}} a_{ij} \right\}$ – гарантированный максимальный выигрыш игрока A при многократном повторении игры.

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,n}} \left\{ \max\limits_{i=\overline{1,m}} a_{ij} \right\}$ – гарантированный минимальный проигрыш игрока B при многократном повторении игры.

При «разумном поведении» игроков $\alpha \le v^o \le \beta$.

Если нижняя цена игры совпадает с верхней, то игра имеет «седловую точку» с координатами (s, k), а именно пару чистых стратегий игроков A_s и B_k, обеспечивающую оптимальную цену игры, причем $v^o = \alpha = \beta = a_{sk}$.

Если нижняя цена игры не совпадает с верхней, то игра не имеет «седловой точки», а применение чистых стратегий не может обеспечить оптимальную цену игры.

К оптимальной цене игры может привести использование противниками смешанных стратегий: $S_A = (p_1, p_2, ..., p_j, ..., p_m)$, $S_B = (q_1, q_2, ..., q_j, ..., q_n)$, а именно, чередование игроком A чистых стратегий A_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ с вероятностями p_i, а игроком B чистых стратегий B_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ с вероятностями q_j. Для смешанных стратегий игроков A и B справедливы следующие утверждения: $\sum\limits_i p_i = 1$, $\sum\limits_j q_j = 1$.

Оптимальное решение игры – пара оптимальных смешанных стратегий противников: S_A^o, S_B^o. Это решение обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то и другому не выгодно отступать от своей оптимальной стратегии.

Теорема Неймана. Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

2.2. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ПАРНОЙ ИГРЫ

Оптимальная стратегия S_A^o обеспечивает игроку A при любой стратегии игрока B выигрыш не меньший чем оптимальная цена игры. Модель задачи определения оптимальной стратегии игрока A принимает вид:

(2.2.1) $S_A = (p_1, p_2, ..., p_j, ..., p_m) = ?$

(2.2.2) $\sum\limits_i p_i = 1$

(2.2.3)
$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \ge v^o \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \ge v^o \\ .... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \ge v^o \end{cases}$$

(2.2.4) $p_i \ge 0, \quad \forall i = \overline{1,m}$

Замечание. Пусть нижняя цена игры положительна. Если это не так, нужно (временно, на этапе определения оптимального решения игры) преобразовать платежную матрицу игры, увеличив все ее элементы на одно и то же число так, чтобы нижняя цена игры была положительна.

Введем неотрицательные переменные: $y_i = \dfrac{p_i}{\nu^o}$. Рассмотрим функцию $Z(y_1, y_2, \ldots y_m) = \sum\limits_i y_i$. Учитывая то, что игрок A стремится к максимальному выигрышу, можно утверждать, что:

$$\min Z = Z^o = \sum_i y_i^o = \frac{1}{\nu^o} = \frac{1}{\max \nu}.$$

Поделив все неравенства системы (2.2.3) на ν^o, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq 1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq 1 \end{cases}$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока A может быть получена с помощью решения следующей задачи линейного программирования:

(2.2.5) $\quad Y^T = (y_1, y_2, \ldots, y_m) = ?$

(2.2.6) $\quad Z(Y) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \to \min$

(2.2.7) $\quad \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \qquad j = \overline{1,n}$

(2.2.8) $\quad y_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,m}$

Зная решение поставленной задачи линейного программирования, можно определить оптимальную стратегию игрока A:

$S_A^o = (p_1^o, p_2^o, \ldots, p_m^o)$, где

$\max \nu = \nu^o = 1/\min Z$,

$p_i^o = y_i^o \cdot \nu^o = y_i^o / \min Z$.

Оптимальная стратегия S_B^o обеспечивает игроку B при любой стратегии игрока A проигрыш не больший чем оптимальная цена игры. Модель задачи определения оптимальной стратегии игрока B принимает вид:

(2.2.9) $\quad S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_n) = ?$

(2.2.10) $\quad \sum\limits_j q_j = 1$

(2.2.11) $$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq \nu^o \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leq \nu^o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq \nu^o \end{cases}$$

(2.2.12) $\quad q_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1,n}$

Введем неотрицательные переменные: $x_j = \frac{q_j}{v^o}$. Рассмотрим функцию $F(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_j x_j$. Учитывая то, что игрок B стремится к минимальному проигрышу, можно утверждать, что:

$$\max F = F^o = \sum_j x_j^o = \frac{1}{v^o} = \frac{1}{\min v}.$$

Поделив все неравенства системы (2.2.11) на v^o, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le 1 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le 1 \end{cases}$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока B может быть получена с помощью решения следующей задачи линейного программирования:

(2.2.13) $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n) = ?$

(2.2.14) $F(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max$

(2.2.15) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le 1; \qquad i = \overline{1,m}$

(2.2.16) $x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}$

Зная решение поставленной задачи линейного программирования, можно определить оптимальную стратегию игрока B:

$S_B^o = (q_1^o, q_2^o, ..., q_n^o)$, где

$\min v = v^o = 1/\max F$,

$q_j^o = x_j^o \cdot v^o = x_j^o / \max F$.

Замечание. Следует учитывать то, что задачи линейного программирования, к которым сводятся задачи определения оптимальных стратегий игроков A и B, являются взаимно-двойственными, и, используя решение одной задачи, легко получить решение другой с помощью теорем двойственности.

Задача 2.2.1. Магазин может закупить для продажи в различных пропорциях товары четырех типов (A_1, A_2, A_3, A_4). Доход магазина зависит от типа товара и состояния спроса. Установлено, что спрос может иметь три состояния (B_1, B_2, B_3).

Данные о доходах от продажи товаров при различных состояниях спроса, представлены матрицей A (a_{ij}(руб.) – прибыль на вложенный рубль, i – номер товара, j - номер состояния спроса).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Цель магазина – максимизация среднего дохода на вложенный рубль. Определить оптимальные пропорции закупки товаров для продажи и оценить вероятности различных состояний спроса на товары.

Решение. Модель задачи определения оптимальной стратегии магазина (игрока A) принимает вид:

$$S_A = (p_1, p_2, p_3, p_4) = ?$$

$$\sum_i p_i = 1$$

$$\begin{cases} 0p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 0p_4 \ge v^o \\ 3p_1 + 2p_2 + 5p_3 + 4p_4 \ge v^o \\ 1p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_2 \ge v^o \end{cases}$$

$$p_i \ge 0, \quad \forall i = \overline{1,4}$$

Упростим платежную матрицу игры. Из игры можно исключить стратегии A_1 и A_4, они хуже стратегии A_3. Другими словами, при всех состояниях спроса первый и четвертый виды товаров не следует закупать для продажи, так как они обеспечивают прибыль на один вложенный рубль меньше чем третий вид товара.

Платежная матрица упрощенной игры имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Определим нижнюю и верхнюю цены игры.

Таблица 2.2.1.1

	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$
A_2	4	2	3	2
A_3	2	5	4	2
$\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,m}} a_{ij}$	4	5	4	$\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \left\{\min\limits_{j=\overline{1,n}} a_{ij}\right\} = 2$ $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,n}} \left\{\max\limits_{i=\overline{1,m}} a_{ij}\right\} = 4$

Нижняя и верхняя цены игры неравны. Оптимальное решение игры следует искать среди смешанных стратегий:

$$S_A = (0, p_2, p_3, 0), \qquad S_B = (q_1, q_2, q_3).$$

Введем неотрицательные переменные: $y_1 = \dfrac{p_2}{v^o}$, $\quad y_2 = \dfrac{p_3}{v^o}$. Для игрока A оптимальная стратегия может быть получена с помощью решения следующей задачи линейного программирования:

$$Y^T = (y_1, y_2) = ?$$

$$Z(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i \to \min$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + 5y_2 \ge 1 \\ 3y_1 + 4y_2 \ge 1 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad \forall i = \overline{1,2}$$

Используем для решения поставленной задачи модифицированный симплексный метод (таблица 2.2.1.2).

Таблица 2.2.1.2

b_i^o	b_j	1	1	0	0	0	M	M	M	c_i	$\frac{c_i}{a_{ik}}$, $a_{ik} > 0$
	y^o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8		
M	y_6	4	2	-1	0	0	1	0	0	1	1/2
M	y_7	2	(5)	0	-1	0	0	1	0	1	1/5 min
M	y_8	3	4	0	0	-1	0	0	1	1	1/4
оц. стр.	Z_{M_j}	9M -1	11M -1	-M	-M	-M	0	0	0	3M	
M	y_6	16/5	0	-1	2/5	0	1		0	3/5	3/16
1	y_2	2/5	1	0	-1/5	0	0		0	1/5	1/2
M	y_8	(7/5)	0	0	4/5	-1	0		1	1/5	1/7 min
оц. стр.	Z_{M_j}	23M/5 -3/5	0	-M	6M/5 -1/5	-M	0		0	4M/5 +1/5	
M	y_6	0	0	-1	-10/7	(16/7)	1			1/7	1/16 min
1	y_2	0	1	0	-3/7	2/7	0			1/7	1/2
1	y_1	1	0	0	4/7	-5/7	0			1/7	-
оц. стр.	Z_{M_j}	0	0	-M	-10M/7 +1/7	16M/7 -3/7	0			M/7 +2/7	
0	y_5	0	0	-7/16	-10/16	1				1/16	
1	y_2	0	1	2/16	-4/16	0				2/16	
1	y_1	1	0	-5/16	2/16	0				3/16	
оц. стр.	Z_{M_j}	0	0	-3/16	-2/16	0				5/16	

Модифицированная задача линейного программирования имеет вид:

$$Y^T = (y_1, y_2), \quad Y_д^T = (y_3, y_4, y_5), \quad Y_и^T = (y_6, y_7, y_8) = ?$$

$$Z_M(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i + M\sum_{i=6}^{8} y_i \to \min$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 - y_3 + y_6 = 1 \\ 2y_1 + 5y_2 - y_4 + y_7 = 1 \\ 3y_1 + 4y_2 - y_5 + y_8 = 1 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad \forall i = \overline{1,8}$$

Решение задачи имеет вид: $Y^T = \left(\frac{3}{16}, \frac{2}{16}\right)$, $\min Z = \frac{5}{16}$.

$$\max \nu = \nu^o = 1/\min Z = 16/5 = 3{,}2 \text{ руб.}$$

Оптимальная стратегия магазина (игрока A), учитывая ранее выполненное упрощение игры, принимает вид:

$S_A^o = (0;0{,}6;0{,}4;0)$, где

$$p_2^o = y_1^o \cdot \nu^o = \frac{y_1^o}{\min Z} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \qquad p_3^o = y_2^o \cdot \nu^o = \frac{y_2^o}{\min Z} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Модель задачи определения вероятностей состояний спроса (игрока B) принимает вид:

$$S_B = (q_1, q_2, q_3) = ?$$

$$\sum_j q_j = 1$$

$$\begin{cases} 0q_1 + 3q_2 + 1q_3 \le \nu^o \\ 4q_1 + 2q_2 + 3q_3 \le \nu^o \\ 2q_1 + 5q_2 + 4q_3 \le \nu^o \\ 0q_1 + 4q_2 + 2q_3 \le \nu^o \end{cases}$$

$$q_j \ge 0, \quad \forall j = \overline{1,3}$$

Из игры можно исключить стратегии A_1 и A_4, а из системы первое и четвертое неравенства.

Введем неотрицательные переменные: $x_j = \frac{q_j}{\nu^o}$, $\forall j = \overline{1,3}$. Оптимальная стратегия игрока B может быть получена с помощью решения следующей задачи линейного программирования:

$$X^T = (x_1, x_2, x_3) = ?$$

$$F(X) = \sum_{j=1}^{3} x_j \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad \forall j = \overline{1,3}$$

Каноническая форма задачи имеет вид:

$$X^T = (x_1, x_2, x_3) = ?, \qquad X_\partial^T = (x_4, x_5) = ?$$

$$F(X) = \sum_{j=1}^{3} x_j \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad \forall j = \overline{1,5}$$

Для решения задачи можно использовать (таблица 2.2.1.3) симплексный метод.

Таблица 2.2.1.3

c_i^o	c_j	1	1	1	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}, \quad a_{ik} > 0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_4	(4)	2	3	1	0	1	1/4 – min
0	x_5	2	5	4	0	1	1	1/2
оценочная строка	F_j	(-1)	-1	0	0	0	0	$X^T = (0;0;0;1;1)$
1	x_1	1	2/4	3/4	1/4	0	1/4	2/4
0	x_5	0	(4)	5/2	-1/2	1	1/2	1/8 – min
оценочная строка	F_j	0	(-1/2)	-1/4	1/4	0	1/4	$X^T = (1/4;0;0;0;1/2)$
1	x_1	1	0	7/16	5/16	-2/16	3/16	
1	x_2	0	1	5/8	-1/8	1/4	1/8	
оценочная строка	F_j	0	0	1/16	3/16	2/16	5/16	$X^T = (3/16;1/8;0;0;0)$

Так как задачи линейного программирования, к которым сводятся задачи определения оптимальных стратегий игроков A и B, являются взаимно-двойственными, то решение второй задачи можно получить (из таблицы 2.2.1.2) с помощью теорем двойственности:

$$X^T = \left(\frac{3}{16}, \frac{2}{16}, 0\right); \ \max F(X) = \min Z(Y) = \frac{5}{16}.$$

Вероятности трех различных состояний спроса на товары принимают вид:

$S_B^o = (0{,}6;0{,}4;0)$, где

$$q_1^o = x_1^o \cdot \nu^o = \frac{x_1^o}{\max F} = 0{,}6; \qquad q_2^o = x_2^o \cdot \nu^o = \frac{x_2^o}{\max F} = 0{,}4; \qquad q_3^o = x_3^o \cdot \nu^o = 0.$$

Решая поставленную задачу, определили, что магазину не следует закупать для продажи товары первого и четвертого видов. Следует использовать на товары второго вида 60% и третьего – 40% средств. При этом средняя прибыль на вложенный рубль составит 3,2 руб. Состояния спроса (B_1, B_2, B_3) будут наблюдаться с вероятностями (0,6; 0,4; 0).

Задача 2.2.2. Инвестор может вложить средства в проекты в торговле, в сфере услуг и промышленности. Прибыль инвестора зависит от проекта и состояния спроса на инвестиции. Установлено, что спрос на инвестиции в крупных и малых городах региона различен. Данные о возможных доходах инвестора по различным проектам при различных состояниях спроса представлены в таблице 2.2.2.1.

Таблица 2.2.2.1

Доход на вложенный рубль	крупные города региона	малые города региона
проекты в торговле	3	4
проекты в сфере услуг	2	6
проекты в промышленности	3	2

Цель инвестора – максимизация среднего дохода на вложенный рубль. Определить оптимальные пропорции инвестиций в проекты в торговле, в сфере услуг и промышленности. Оценить состояние спроса на инвестиции в крупных и малых городах региона.

Решение. В качестве игрока A рассмотрим инвестора с тремя стратегиями размещения средств: A_1 – в торговле, A_2 – в сфере услуг, A_2 – в промышленности. В качестве игрока B рассмотрим спрос на инвестиции с двумя различными стратегиями: в крупных (B_1) и малых городах региона (B_2). Определим нижнюю и верхнюю цены игры.

Таблица 2.2.2.2

	B_1	B_2	$\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,2}} a_{ij}$
A_1	3	4	3
A_2	2	6	2
A_3	3	2	2
$\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,3}} a_{ij}$	3	6	$\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \left\{\min\limits_{j=\overline{1,2}} a_{ij}\right\} = 3$ $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,2}} \left\{\max\limits_{i=\overline{1,3}} a_{ij}\right\} = 3$

Нижняя и верхняя цены игры равны. В качестве оптимальных стратегий у игроков могут быть названы чистые стратегии A_1 и B_1. Все средства инвестора следует вложить в торговлю. Спрос на инвестиции ожидается практически только в крупных городах.

Следует отметить, что упрощение игры, а именно, последовательное удаление «менее удачных стратегий»: A_3, B_2, A_2 – приведет к тому, что у игроков останется по одной стратегии, которые и становятся оптимальными.

Замечание. Следует учитывать то, что упрощение игры может привести к потере части оптимальных стратегий игроков. Оптимальное решение игры желательно искать среди смешанных стратегий: $S_A = (p_1, p_2, p_3)$, $S_B = (q_1, q_2)$.

Модель задачи определения оптимальной пропорции инвестиций в проекты в торговле, в сфере услуг и промышленности принимает вид:

$$S_A = (p_1, p_2, p_3) = ?$$

$$\sum_i p_i = 1$$

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 + 3p_3 \geq v^o \\ 4p_1 + 6p_2 + 2p_3 \geq v^o \end{cases}$$

$$p_i \geq 0, \quad \forall i = \overline{1,3}$$

Введем неотрицательные переменные: $y_i = \dfrac{p_i}{v^o}$, $\forall i = \overline{1,3}$. Для игрока A оптимальная стратегия может быть получена с помощью решения задачи:

$$Y^T = (y_1, y_2, y_3) = ?$$

$$Z(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i \to \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,3}$$

Модифицированная задача линейного программирования имеет вид:

$$Y^T = (y_1, y_2, y_3) = ?, \quad Y_д^T = (y_4, y_5) = ?, \quad Y_и^T = (y_6, y_7) = ?$$

$$Z_M(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i + M \sum_{i=6}^{7} y_i \to \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_4 \qquad + y_6 \qquad = 1 \\ 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 \qquad - y_5 \qquad + y_7 = 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \qquad \forall i = \overline{1,7}$$

Используя для решения поставленной задачи модифицированный симплексный метод (таблица 2.2.2.3), можно установить, что задача имеет бесчисленное множество решений. Два базисных решения из бесчисленного множества имеют вид:

$$Y^T = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right); \quad Y^T = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}\right); \qquad \min Z = \frac{1}{3}.$$

Максимальный средний доход инвестора на вложенный рубль составит:

$$\max v = v^o = 1/\min Z = 3\text{руб.}$$

Оптимальные стратегии инвестора (игрока A) принимают вид:

$$S_A^I = (1;0;0), \; S_A^{II} = (0{,}5;0;0{,}5).$$

Легко указать все бесчисленное множество оптимальных стратегий инвестора:

$$S_A^o = \lambda S_A^I + (1-\lambda) S_A^{II}, \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Таблица 2.2.2.3

b_i^o	b_j	1	1	1	0	0	M	M	c_i	$\frac{c_i}{a_{ik}}$, $a_{ik} > 0$
	y^o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
M	y_6	3	2	3	-1	0	1	0	1	1/2
M	y_7	4	(6)	2	0	-1	0	1	1	1/6 min
оц. стр.	Z_{M_j}	7M -1	8M -1	5M -1	-M	-M	0	0	2M	
M	y_6	10/6	0	(14/6)	-1	2/6	1		4/6	4/14 min
1	y_2	4/6	1	2/6	0	-1/6	0		1/6	1/2
оц. стр.	Z_{M_j}	10M/6 -2/6	0	14M/6 -4/6	-M	2M/6 1/6	0		4M/6 +1/6	
1	y_3	10/14	0	1	-6/14	2/14			4/14	4/10
1	y_2	(6/14)	1	0	2/14	-3/14			1/14	1/6 min
оц. стр.	Z_{M_j}	2/14	0	0	-4/14	-1/14			5/14	
1	y_3	0	-10/6	1	-4/6	3/6			1/6	1/3 min
1	y_1	1	14/6	0	2/6	-3/6			1/6	-
оц. стр.	Z_{M_j}	0	-1/3	0	-1/3	(0)			1/3	
0	y_5	0	-10/3	2	-4/3	1			1/3	
1	y_1	1	2/3	1	-1/3	0			1/3	
оц. стр.	Z_{M_j}	0	-1/3	0	-1/3	0			1/3	

Модель задачи оценки спроса на инвестиции (игрока B) принимает вид:

$$S_B = (q_1, q_2) = ?$$

$$\sum_j q_j = 1$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 4q_2 \le v^o \\ 2q_1 + 6q_2 \le v^o \\ 3q_1 + 2q_2 \le v^o \end{cases}$$

$$q_j \ge 0, \quad \forall j = \overline{1,2}$$

Введем неотрицательные переменные: $x_j = \dfrac{q_j}{v^o}, \quad \forall j = \overline{1,2}$.

Оптимальная стратегия игрока B может быть получена с помощью решения задачи:

$$X^T = (x_1, x_2) = ?$$

$$F(X) = \sum_{j=1}^{2} x_j \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,2}$$

Решение задачи получим с помощью теорем двойственности (таблица 2.2.2.3):

$$X^T = (1/3;0); \qquad \max F(X) = \min Z(Y) = 1/3.$$

Для решения задачи можно использовать (таблица 2.2.2.4) симплексный метод. Каноническая форма задачи имеет вид:

$$X^T = (x_1, x_2) = ?, \qquad X_\partial^T = (x_3, x_4, x_5) = ?$$

$$F(X) = \sum_{j=1}^{2} x_j \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,5}$$

Таблица 2.2.2.4

c_i^o	c_j	1	1	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}, \quad a_{ik} > 0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x_3	(3)	4	1	0	0	1	1/3 – min
0	x_4	2	6	0	1	0	1	1/2
0	x_5	3	2	0	0	1	1	1/3 – min
оценочная строка	F_j	(-1)	-1	0	0	0	0	$X^T = (0;0;1;1;1)$
1	x_1	1	4/3	1/3	0	0	1/3	
0	x_4	0	10/3	-2/3	1	0	1/3	
0	x_5	0	-2	-1	0	1	0	
оценочная строка	F_j	0	1/3	1/3	0	0	1/3	$X^T = (1/3;0;0;1/3;0)$

Вероятности спроса на инвестиции принимают вид: $S_B^o = (1;0)$.

Решая задачу, установили, что инвестору не следует вкладывать средства в сферу услуг. Все средства следует вложить в проекты в торговле и промышленности данного региона в пропорции: $(1+\lambda):(1-\lambda), \quad \forall 0 \le \lambda \le 1$. Спрос на инвестиции в малых городах региона практически будет отсутствовать. При этом средняя прибыль на вложенный рубль составит 3 руб.

2.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.3.1. Магазин может закупить для продажи товары четырех видов $\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right)$ в различных пропорциях. Доход магазина зависит от вида товара и состояния спроса. Установлено, что спрос на товары может иметь три состояния $\left(B_1, B_2, B_3\right)$. Данные о доходах от продажи товаров при различных состояниях спроса, представлены платежной матрицей игры A (a_{ij}(руб.) – прибыль на вложенный рубль, i – номер вида товара, j - номер состояния спроса). Цель магазина – максимизация среднего дохода на вложенный рубль. Требуется:

- ✓ Составить модель задачи по определению оптимальной стратегии магазина в закупках товаров различных видов. Свести поставленную задачу к задаче линейного программирования и найти ее решение. Определить оптимальную стратегию магазина по закупке товаров.
- ✓ Составить модель задачи по оценке вероятностей различных состояний спроса на товары. Свести поставленную задачу к задаче линейного программирования и найти ее решение. Оценить вероятности различных состояний спроса на товары.

№ 2.3.1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	№ 2.3.1.2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
№ 2.3.1.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	№ 2.3.1.4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
№ 2.3.1.5. $A=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 8 \\ 14 & 2 & 14 \\ 10 & 2 & 10 \\ 12 & 2 & 14 \end{pmatrix}$	№ 2.3.1.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
№ 2.3.1.7. $A=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	№ 2.3.1.8. $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

№ 2.3.1.9. $A=\begin{pmatrix}16 & 24 & 18\\ 24 & 0 & 24\\ 16 & 8 & 18\\ 22 & 0 & 22\end{pmatrix}$	№ 2.3.1.10. $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 7\\ 7 & 1 & 2\\ 2 & 7 & 7\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$
№ 2.3.1.11. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 5 & 3\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$	№ 2.3.1.12. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 4 & 0 & 4\\ 5 & 2 & 5\\ 6 & 1 & 6\end{pmatrix}$
№ 2.3.1.13. $A=\begin{pmatrix}2 & 10 & 2\\ 5 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 8\\ 6 & 2 & 6\end{pmatrix}$	№ 2.3.1.14. $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 0\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$
№ 2.3.1.15. $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 4\\ 4 & 0 & 4\\ 8 & 0 & 8\\ 10 & 6 & 0\end{pmatrix}$	№ 2.3.1.16. $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ 6 & 4 & 1\\ 2 & 7 & 1\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$
№ 2.3.1.17. $A=\begin{pmatrix}2 & 10 & 2\\ 4 & 5 & 4\\ 6 & 6 & 4\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}$	№ 2.3.1.18. $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 5 & 5 & 2\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}$
№ 2.3.1.19. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ 4 & 0 & 4\\ 4 & 2 & 4\\ 5 & 0 & 5\end{pmatrix}$	№ 2.3.1.20. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 0\\ 8 & 3 & 0\\ 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Задача 2.3.2. Инвестор может вложить средства в проекты в торговле, в сфере услуг и промышленности. Прибыль зависит от проекта и состояния спроса на инвестиции. Установлено, что спрос на инвестиции в крупных и малых городах региона различен. Цель инвестора – максимизация среднего дохода на вложенный рубль. Определить оптимальные пропорции инвестиций в проекты в торговле, в сфере услуг и промышленности. Оценить состояние

спроса на инвестиции в крупных и малых городах региона. Данные о возможных доходах инвестора по различным проектам представлены в таблице.

Таблица	Доход (руб.) на вложенный рубль	крупные города	малые города
№ 2.3.2.1.	в торговле	2	3
	в сфере услуг	1	5
	в промышленности	2	1
№ 2.3.2.2.	в торговле	0	8
	в сфере услуг	3	4
	в промышленности	3	2
№ 2.3.2.3.	в торговле	3	7
	в сфере услуг	3	1
	в промышленности	2	5
№ 2.3.2.4.	в торговле	2	6
	в сфере услуг	3	5
	в промышленности	1	0
№ 2.3.2.5.	в торговле	4	6
	в сфере услуг	4	0
	в промышленности	4	2
№ 2.3.2.6.	в торговле	4	5
	в сфере услуг	3	7
	в промышленности	4	3
№ 2.3.2.7.	в торговле	2	10
	в сфере услуг	5	6
	в промышленности	5	4
№ 2.3.2.8.	в торговле	6	14
	в сфере услуг	6	2
	в промышленности	4	10
№ 2.3.2.9.	в торговле	2	9
	в сфере услуг	6	7
	в промышленности	4	3
№ 2.3.2.10.	в торговле	16	24
	в сфере услуг	16	0
	в промышленности	16	8

Таблица	Доход (руб.) на вложенный рубль	крупные города	малые города
№ 2.3.2.11.	в торговле	2	3
	в сфере услуг	5	1
	в промышленности	2	1
№ 2.3.2.12.	в торговле	0	8
	в сфере услуг	4	3
	в промышленности	3	2
№ 2.3.2.13.	в торговле	7	3
	в сфере услуг	3	1
	в промышленности	2	5
№ 2.3.2.14.	в торговле	2	6
	в сфере услуг	5	3
	в промышленности	1	0
№ 2.3.2.15.	в торговле	6	4
	в сфере услуг	4	0
	в промышленности	2	5
№ 2.3.2.16.	в торговле	4	5
	в сфере услуг	7	3
	в промышленности	4	3
№ 2.3.2.17.	в торговле	2	10
	в сфере услуг	6	5
	в промышленности	5	4
№ 2.3.2.18.	в торговле	14	6
	в сфере услуг	6	2
	в промышленности	4	10
№ 2.3.2.19.	в торговле	2	9
	в сфере услуг	7	6
	в промышленности	4	3
№ 2.3.2.20.	в торговле	24	8
	в сфере услуг	0	16
	в промышленности	16	8

3. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под системой массового обслуживания (СМО) понимается система, многократно решающая однотипные задачи (АТС, магазин, операционный зал банка, парикмахерская, станция скорой помощи, мастерская по ремонту техники и т. д.).

Предмет теории систем массового обслуживания – формирование эффективных СМО на основе применения математических методов. В качестве критериев эффективности могут быть выбраны: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, среднее число заявок в очереди, вероятность отказа в обслуживании и т. д.

Система массового обслуживания включает каналы обслуживания (телефонные номера, продавцы, парикмахеры, бригады скорой помощи, мастера и т. д.). Потоки заявок и время их обслуживания носят случайный характер.

Если моменты перехода СМО из состояния в состояние не фиксированы, то ***в системе наблюдается случайный процесс с непрерывным временем***.

Если моменты перехода СМО из состояния в состояние зафиксированы, то ***в системе наблюдается случайный процесс с дискретным временем***.

Если все состояния СМО можно снабдить номерами, то ***в системе наблюдается случайный процесс с дискретным набором состояний.***

Последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в системе в случайные моменты времени называют ***потоком событий***.

Частота появления событий в СМО в единицу времени называется ***интенсивностью потока событий.***

Если события в СМО следуют через равные промежутки времени, то ***поток событий называют регулярным.***

Если вероятностные характеристики состояний системы и потоков событий не зависят от времени, то в СМО наблюдается ***стационарный поток событий***.

Если события появляются в потоке поодиночке, а не группами, то в СМО имеет место ***ординарный поток событий***.

Если число событий, попадающих на один из двух непересекающихся промежутков времени, не зависит от числа событий, попадающих на другой, то в СМО наблюдается ***поток событий без последействия***.

Стационарный, ординарный поток событий без последействия называют ***простейшим потоком событий***.

Схему случайного процесса с дискретным набором состояний называют ***графом состояний системы***. Дуги, ведущие от одного состояния к другому, показывают потоки событий. Граф называют размеченным, если дуги снабжены интенсивностями потоков событий.

Вероятность того, что система в момент времени *t* находится в состоянии S_i, ***обозначим*** – $p_i(t)$**.** Для любого момента времени *t* справедливо следующее:

$$\sum_i p_i(t) = 1 .$$

$\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) = p_i$ – ***предельная вероятность состояния*** S_i**.**

Если число состояний СМО конечно, то предельные вероятности состояний системы существуют и численно равны средней доле времени пребывания системы в этих состояниях.

Значения предельных вероятностей состояний системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме, можно найти с помощью решения системы ***уравнений Колмогорова.*** Для каждого состояния СМО формируется свое уравнение по следующему правилу:

- ✓ левая часть уравнения представляет собой произведение вероятности данного состояния на сумму интенсивностей потоков событий, выводящих систему из этого состояния;
- ✓ правая часть представляет собой сумму произведений вероятностей состояний, из которых к данному состоянию ведут потоки событий и соответствующих интенсивностей потоков событий.

Задача 3.1. Построить граф состояний и найти с помощью уравнений Колмогорова предельные вероятности состояний системы массового обслуживания. Интенсивности потоков событий, переводящих систему из одного в другое состояние, заданы матрицей λ

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Система массового обслуживания может находиться в одном из четырех состояний. Размеченный граф состояний представлен на рис.3.1.

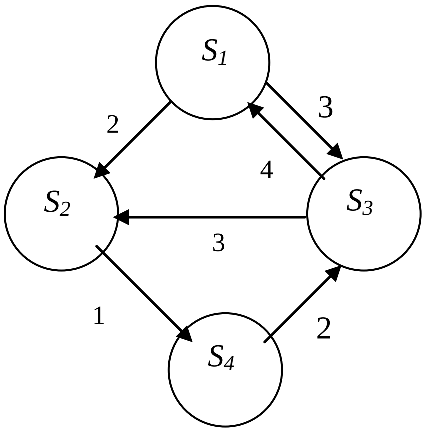


Рис. 3.1.

Уравнения Колмогорова принимают вид:

$$
\begin{array}{ll}
S_1: & \\
S_2: & \\
S_3: & \\
S_4: &
\end{array}
\quad
\begin{cases}
(2+3)p_1 = 4p_3 \\
1p_2 = 2p_1 + 3p_3 \\
(4+3)p_3 = 3p_1 + 2p_4 \\
2p_4 = 1p_2
\end{cases}
$$

Из уравнений следует:

$$p_3 = \frac{5}{4}p_1,$$

$$p_2 = 2p_1 + \frac{15}{4}p_1 = \frac{23}{4}p_1,.$$

$$p_4 = \frac{23}{8}p_1$$

Используем дополнительно уравнение:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

В результате предельные вероятности состояний СМО составят:

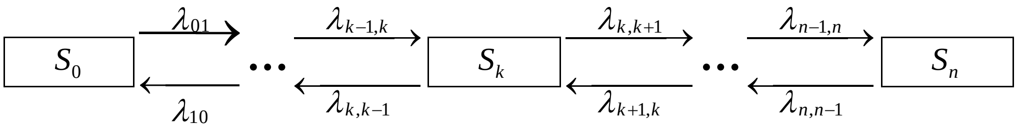
$$p_1 = \frac{8}{87}, \qquad p_2 = \frac{46}{87}, \qquad p_3 = \frac{10}{87}, \qquad p_4 = \frac{23}{87}.$$

3.2. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Система массового обслуживания включает n каналов. Потоки заявок и их обслуживания простейшие.

3.2.1. Система массового обслуживания без ожидания (без очереди)

Очередная заявка, если все каналы уже заняты, не остается в системе, а покидает ее, не ожидая обслуживания.



$S_k, \quad \forall k = \overline{0,n}$ – состояния системы массового обслуживания, при которых исполнением заявок занято k каналов.

$\lambda_{k-1,k} = \lambda$ – интенсивности потока заявок.

$\bar{t}$ – среднее время обслуживания заявки одним каналом.

$\mu = \dfrac{1}{\bar{t}}$ – интенсивность обслуживания заявки одним каналом.

$\lambda_{k,k-1} = k\mu$ – интенсивности потока обслуживания заявок.

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – приведенная интенсивность потока заявок (нагрузка канала).

Составим уравнения Колмогорова для всех состояний системы:

$$
\begin{array}{ll}
S_0: & \left\{\begin{array}{l}
\lambda_{01}p_0=\lambda_{10}p_1 \\
(\lambda_{10}+\lambda_{12})p_1=\lambda_{01}p_0+\lambda_{21}p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda_{k,k-1}+\lambda_{k,k+1})p_k=\lambda_{k-1,k}p_{k-1}+\lambda_{k+1,k}p_{k+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{n,n-1}p_n=\lambda_{n-1,n}p_{n-1}
\end{array}\right. \\
S_1: & \\
S_k: & \\
S_n: &
\end{array}
$$

Используя свойство $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ и уравнения Колмогорова, получим предельные вероятности состояний системы:

$$p_0=\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\cdot\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}+\ldots+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\cdot\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{k,k-1}}+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\cdot\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}}\right)^{-1},$$

$$p_k=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\cdot\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{k,k-1}}\,p_0,\qquad \forall k=\overline{1,n}.$$

Используя приведенную интенсивность потока заявок, получим:

$$p_0=\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^k}{k!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\qquad k=\overline{1,n}.$$

Вероятность отказа СМО в обслуживании заявки: $P_{отк}=p_n=\dfrac{\rho^n}{n!}p_0$.

Относительная пропускная способность системы: $Q=1-P_{отк}=1-\dfrac{\rho^n}{n!}p_0$.

Абсолютная пропускная способность СМО: $A=\lambda(1-P_{отк})=\lambda\left(1-\dfrac{\rho^n}{n!}p_0\right)$.

Среднее число занятых каналов: $\bar{k}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot p_k=\rho\cdot\left(1-\dfrac{\rho^n}{n!}p_0\right)$.

Задача 3.2.1. Рассматриваются торговые ряды с большим количеством продавцов, предлагающих покупателям продукты одного ассортимента. В течение часа торговые ряды посещают в среднем 20 покупателей. Все продавцы обслуживают покупателя в среднем 12 минут. Один покупатель приобретает продукты в среднем на 300 руб. Покупатели, увидев продавцов, занятых обслуживанием, в очередь не становятся. Владелец торговых рядов отдает 10% выручки продавцам и оплачивает им вынужденный простой – 30 руб. за час. Определить оптимальное количество продавцов, обеспечивающее владельцу торговых рядов максимальный доход.

Решение. Торговые ряды – многоканальная система массового обслуживания. Потоки заявок и их обслуживания простейшие. Очередной посетитель (заявка), если все продавцы (каналы) уже заняты, покидает торговые ряды (СМО), не ожидая обслуживания.

n – количество продавцов в торговых рядах (каналов СМО).

$\lambda = 20\,\frac{заяв}{час}$ – интенсивность потока посетителей торговых рядов (заявок).

$\bar{t} = 12\,\frac{мин}{заяв} = 0{,}2\,\frac{час}{заяв}$ – среднее время обслуживания покупателя продавцом (заявки одним каналом).

$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = 5\,\frac{заяв}{час}$ – интенсивность обслуживания покупателя продавцом (заявки одним каналом).

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 4$ – приведенная интенсивность потока посетителей торговых рядов (нагрузка канала).

$c = 300\,руб.$ – средняя выручка с одного покупателя.

$i = 10\%$ – доля выручки, остающаяся у продавцов.

$b = 30\,\frac{руб.}{час}$ –оплата вынужденного простоя продавца.

$F = cA(1-i) - b(n-\bar{k})$ – средний доход владельца торговых рядов в единицу времени (*час*).

Наглядной иллюстрацией того, как доход владельца торговых рядов меняется в зависимости от количества продавцов, является рис. 3.2.1. Результаты расчетов дохода владельца представлены в таблице 3.2.1.

Таблица 3.2.1.

n	F (руб.)	$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}$	$P_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} p_0$	$Q = 1 - P_{отк}$	$A = \lambda(1 - P_{отк})$	$\bar{k} = \frac{A}{\mu}$
1	1074,00	0,2000	0,8000	0,2000	4,0000	0,8000
2	2063,08	0,0769	0,6154	0,3846	7,6923	1,5385
3	2942,11	0,0423	0,4507	0,5493	10,9859	2,1972
4	3685,05	0,0291	0,3107	0,6893	13,7864	2,7573
5	4271,15	0,0233	0,1991	0,8009	16,0187	3,2037
6	4693,26	0,0206	0,1172	0,8828	17,6568	3,5314
7	4963,63	0,0193	0,0627	0,9373	18,7450	3,7490
8	5112,08	0,0187	0,0304	0,9696	19,3916	3,8783
9	5176,37	0,0185	0,0133	0,9867	19,7332	3,9466
10	5190,70	0,0184	0,0053	0,9947	19,8938	3,9788
11	5179,37	0,0183	0,0019	0,9981	19,9615	3,9923
12	5156,46	0,0183	0,0006	0,9994	19,9872	3,9974
13	5128,91	0,0183	0,0002	0,9998	19,9961	3,9992
14	5099,69	0,0183	0,0001	0,9999	19,9989	3,9998
15	5069,92	0,0183	0,0000	1,0000	19,9997	3,9999
16	5039,98	0,0183	0,0000	1,0000	19,9999	4,0000
17	5010,00	0,0183	0,0000	1,0000	20,0000	4,0000

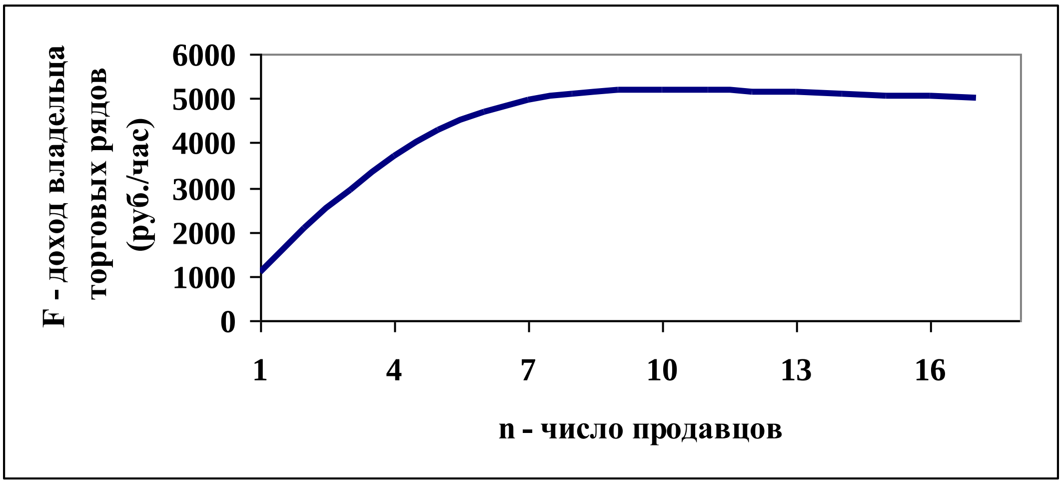
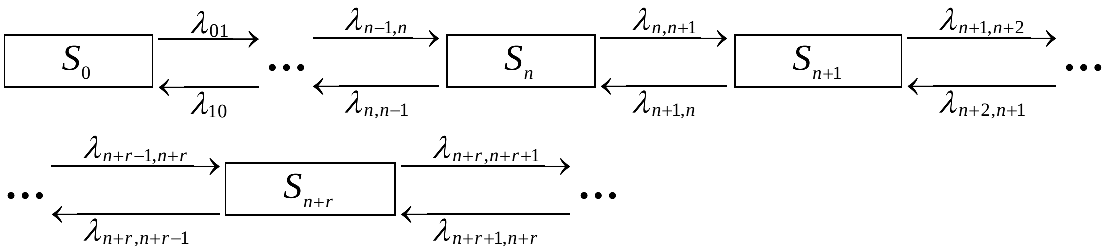


Рис.3.2.1. Доход владельца торговых рядов.

Оптимальное количество продавцов, обеспечивающее владельцу торговых рядов максимальный доход $\max F = 5190{,}70\,\frac{руб.}{час}$, равно десяти. Посетителю практически не будет отказано в обслуживании, если в торговых рядах будет работать 12 продавцов, так как в этом случае: $P_{отк} = 0{,}0006 < 0{,}001$.

3.2.2. Система массового обслуживания с ожиданием (с неограниченной очередью)

Очередная заявка, если все каналы уже заняты, остается в системе, не покидает ее, а ожидает обслуживания в очереди. На длину очереди ограничений нет.



S_k, $\forall k = \overline{1,n}$ – состояния системы массового обслуживания, при которых исполнением заявок занято k каналов.

S_{n+r}, $\forall r$ – состояния системы массового обслуживания, при которых исполнением заявок занято все n каналов, и r заявок имеется в очереди.

$\lambda_{k-1,k} = \lambda$ – интенсивности потока заявок.

$\bar{t}$ – среднее время обслуживания заявки одним каналом.

$\mu = \dfrac{1}{\bar{t}}$ – интенсивность обслуживания заявки одним каналом.

$$\begin{cases} \lambda_{k,k-1} = k\mu, & \forall k = \overline{1,n} \\ \lambda_{n+r,n+r-1} = n\mu, & \forall r = \overline{1,\infty} \end{cases}$$ – интенсивности потока обслуживания заявок.

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – приведенная интенсивность потока заявок (нагрузка канала).

Составим уравнения Колмогорова для всех состояний системы:

$$
\begin{array}{ll}
S_0 : & \\
S_k, \quad \forall k = \overline{1,n} \quad : & \\
S_{n+r}, \quad \forall r = \overline{1,\infty} \quad : &
\end{array}
\begin{cases}
\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda_{k,k-1} + \lambda_{k,k+1}) p_k = \lambda_{k-1,k} p_{k-1} + \lambda_{k+1,k} p_{k+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda_{n+r,n+r-1} + \lambda_{n+r,n+r+1}) p_{n+r} = \lambda_{n+r-1,n+r} p_{n+r-1} + \lambda_{n+r+1,n+r} p_{n+r+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Используя свойство СМО, состоящее в том, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, уравнения Колмогорова, и приведенную интенсивность потока заявок, получим вероятность того, что в системе нет заявок:

$$p_0 = \left(1 + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho}{n} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^r + \ldots \right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r \right)^{-1}$$

Если число каналов отвечает требованию $n > \rho$, то:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r = \frac{\rho/n}{1 - \rho/n}, \qquad p_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1},$$

при этом система массового обслуживания справится с очередью.

Предельные вероятности состояний СМО принимают вид:

$$
\begin{cases}
p_k = p_0 \dfrac{\rho^k}{k!}, \quad \forall k = \overline{1,n}. \\
p_{n+r} = p_0 \dfrac{\rho^{n+r}}{n! n^r}, \quad \forall r = \overline{1,\infty}.
\end{cases}
$$

Вероятность отказа системы в обслуживании очередной заявки: $P_{отк} = 0$.

Относительная пропускная способность системы: $Q = 1 - P_{отк} = 1$.

Абсолютная пропускная способность системы: $A = \lambda$.

Вероятность наличия очереди: $P_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0$.

Среднее число занятых каналов: $\bar{k} = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$.

Среднее число заявок в очереди: $L_{оч} = \dfrac{n}{n-\rho} P_{оч}$.

Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}$.

Среднее время пребывания заявки в очереди: $T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$.

Среднее время пребывания заявки в системе: $T_{сист} = \dfrac{L_{сист}}{\lambda}$.

Задача 3.2.2. Анализируется работа фирмы по гарантийному ремонту бытовой техники. В течение суток в фирму обращаются в среднем 15 клиентов. Все мастера ремонтируют бытовую технику в среднем 8 часов. Клиент может оставить технику на ремонт независимо от степени занятости мастеров фирмы. Владелец фирмы вынужден тратить на содержание каждой единицы бытовой техники, ожидающей ремонта в среднем 25 руб. за час, и оплачивать мастерам вынужденный простой – 10 руб. за час. Определить оптимальное количество мастеров, при котором издержки фирмы (по содержанию бытовой техники, ожидающей ремонта, и оплате мастерам вынужденного простоя) будут минимальны.

Решение. Фирма по гарантийному ремонту бытовой техники – многоканальная система массового обслуживания. Потоки заявок и их обслуживания простейшие. Очередной клиент, даже если все мастера уже заняты, оставляет бытовую технику на ремонт.

n – количество мастеров на фирме (каналов СМО).

$\lambda = 15 \frac{заяв}{сутки}$ – интенсивность потока заявок на фирме.

$\bar{t} = 8 \frac{час}{заяв} = 1/3 \frac{сутки}{заяв}$ – среднее время ремонта одной единицы бытовой техники (обслуживания заявки одним каналом).

$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = 3 \frac{заяв}{сутки}$ – интенсивность обслуживания заявок одним мастером.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 5$ – приведенная интенсивность потока заявок.

$b_1 = 25 \frac{руб.}{час} = 600 \frac{руб.}{сутки}$ – средние затраты на содержание каждой единицы бытовой техники, ожидающей ремонта.

$b_2 = 10 \frac{руб.}{час} = 240 \frac{руб.}{сутки}$ –оплата вынужденного простоя мастера.

$Z = b_1 L_{оч} + b_2 (n - \bar{k})$ – средние издержки фирмы в единицу времени (*сутки*).

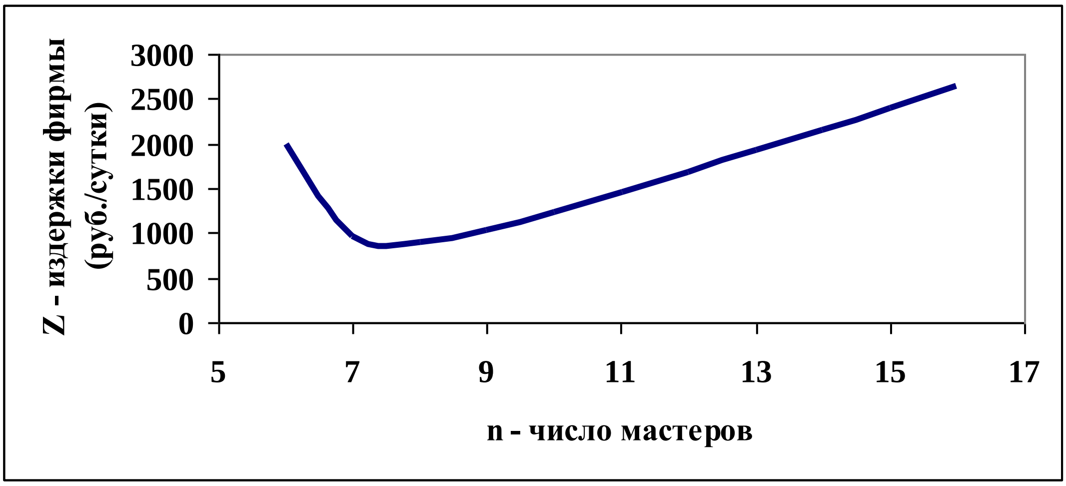


Рис.3.2.2. Издержки фирмы по ремонту бытовой техники.

Наглядной иллюстрацией того, как издержки фирмы меняются в зависимости от количества мастеров, является рис. 3.2.2. Результаты расчетов издержек фирмы представлены в таблице 3.2.2.

Таблица 3.2.2.

n	Z (руб.)	$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}$	$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0$	$L_{оч} = \frac{n}{n-\rho} P_{оч}$	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$ (час)
6	2002,55	0,0045	0,4896	2,9376	4,70
7	966,22	0,0060	0,2315	0,8104	1,30
8	887,27	0,0065	0,1045	0,2788	0,45
9	1020,38	0,0066	0,0447	0,1006	0,16
10	1221,66	0,0067	0,0181	0,0361	0,06
11	1447,54	0,0067	0,0069	0,0126	0,02
12	1682,52	0,0067	0,0025	0,0042	0,01
13	1920,80	0,0067	0,0008	0,0013	0,00
14	2160,24	0,0067	0,0003	0,0004	0,00
15	2400,07	0,0067	0,0001	0,0001	0,00
16	2640,02	0,0067	0,0000	0,0000	0,00

Если $n > \rho \geq 6$, то фирма справится с очередью. Оптимальное количество мастеров, обеспечивающее фирме по ремонту бытовой техники минимальные издержки $\min Z = 887{,}27 \frac{руб.}{сутки}$, равно восьми. При этом среднее время пребывания заявки в очереди составит 27 мин. Клиент практически будет обслужен без очереди, если на фирме будет работать 13 мастеров, так как в этом случае: $P_{оч} = 0{,}0008 < 0{,}001$.

3.2.3. Система массового обслуживания с ограниченной очередью

Очередная заявка, если все каналы уже заняты обслуживанием, остается в системе, не покидает ее, а ожидает обслуживания в очереди. На длину очереди имеются ограничения.

$$\boxed{S_0} \underset{\lambda_{10}}{\overset{\lambda_{01}}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\lambda_{n,n-1}}{\overset{\lambda_{n-1,n}}{\rightleftarrows}} \boxed{S_n} \underset{\lambda_{n+1,n}}{\overset{\lambda_{n,n+1}}{\rightleftarrows}} \boxed{S_{n+1}} \underset{\lambda_{n+2,n+1}}{\overset{\lambda_{n+1,n+2}}{\rightleftarrows}} \cdots$$

$$\cdots \underset{\lambda_{n+r,n+r-1}}{\overset{\lambda_{n+r-1,n+r}}{\rightleftarrows}} \boxed{S_{n+r}} \underset{\lambda_{n+r+1,n+r}}{\overset{\lambda_{n+r,n+r+1}}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\lambda_{n+m,n+m-1}}{\overset{\lambda_{n+m-1,n+m}}{\rightleftarrows}} \boxed{S_{n+m}}$$

S_k, $\forall k = \overline{1,n}$ – состояния системы массового обслуживания, при которых исполнением заявок занято k каналов.

S_{n+r}, $\forall r = \overline{1,m}$ – состояния системы массового обслуживания, при которых исполнением заявок занято все n каналов, и r заявок имеется в очереди.

$\lambda_{k-1,k} = \lambda$ – интенсивности потока заявок.

$\bar{t}$ – среднее время обслуживания заявки одним каналом.

$\mu = \frac{1}{\bar{t}}$ – интенсивность обслуживания заявки одним каналом.

$\begin{cases} \lambda_{k,k-1} = k\mu, & \forall k = \overline{1,n} \\ \lambda_{n+r,n+r-1} = n\mu, & \forall r = \overline{1,m} \end{cases}$ – интенсивности потока обслуживания заявок.

Составим уравнения Колмогорова для всех состояний системы:

$$\begin{array}{ll} S_0: & \\ & \\ S_k, \quad \forall k = \overline{1,n} \quad : & \\ & \\ S_{n+r}, \quad \forall r = \overline{1,(m-1)} \quad : & \\ & \\ S_{n+m}: & \end{array} \begin{cases} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\lambda_{k,k-1} + \lambda_{k,k+1}) p_k = \lambda_{k-1,k} p_{k-1} + \lambda_{k+1,k} p_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\lambda_{n+r,n+r-1} + \lambda_{n+r,n+r+1}) p_{n+r} = \lambda_{n+r-1,n+r} p_{n+r-1} + \lambda_{n+r+1,n+r} p_{n+r+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n+m-1,n+m} p_{n+m-1} = \lambda_{n+m,n+m-1} p_{n+m} \end{cases}$$

Используя приведенную интенсивность потока заявок $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$, свойство СМО, состоящее в том, что $\sum_{i=0}^{n+m} p_i = 1$, и уравнения Колмогорова, получим вероятность того, что в системе нет заявок:

$$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\rho}{n} \right)^r \right)^{-1}.$$

Предельные вероятности состояний СМО составят:

$$\begin{cases} p_k = p_0 \frac{\rho^k}{k!}, & \forall k = \overline{1,n}. \\ p_{n+r} = p_0 \frac{\rho^{n+r}}{n! n^r}, & \forall r = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Вероятность отказа СМО в обслуживании заявки: $P_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^m p_0$.

Относительная пропускная способность: $Q = 1 - P_{отк} = 1 - p_{n+m} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^m p_0$.

Абсолютная пропускная способность системы: $A = \lambda \cdot Q$.

Вероятность наличия очереди: $P_{оч} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\rho}{n} \right)^r p_0$.

Среднее число занятых каналов: $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot Q$.

Среднее число заявок в очереди: $L_{оч} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{m} r \left(\frac{\rho}{n} \right)^r p_0$.

Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}$.

Среднее время пребывания заявки в очереди: $T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$.

Среднее время пребывания заявки в системе: $T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}$.

Задача 3.2.3. Анализируется работа фирмы по ремонту автомобилей. В течение суток на фирму обращаются в среднем 12 клиентов. Ремонт автомобиля выполняется одним мастером в среднем за 3000 руб. 12 часов. Фирма располагает стоянкой на три автомобиля, ожидающих ремонта. Владелец фирмы отдает мастерам 40% выручки, оплачивает им вынужденный простой – 250 руб. за сутки, и тратит на охрану каждого автомобиля, ожидающего ремонта в среднем 50 руб. в сутки. Определить оптимальные количества мастеров, при которых владелец фирмы будет иметь минимальные издержки, максимальный доход.

Решение. Фирма по ремонту автомобилей – многоканальная система массового обслуживания. Потоки заявок и их обслуживания простейшие. Если все мастера заняты, клиенты (не более трех) могут оставить автомобили в очереди на ремонт на имеющейся у фирмы стоянке.

n – количество мастеров на фирме (каналов СМО).

$\lambda = 12 \frac{заяв}{сутки}$ – интенсивность потока заявок на фирме.

$\bar{t} = 12 \frac{час}{заяв} = 0{,}5 \frac{сутки}{заяв}$ – среднее время ремонта автомобиля (обслуживания заявки одним каналом).

$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = 2 \frac{заяв}{сутки}$ – интенсивность обслуживания заявок одним мастером.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 6$ – приведенная интенсивность потока заявок.

$r \le m = 3$ – число автомобилей в очереди на ремонт (не более трех).

$c = 3000\,руб.$ – средняя выручка фирмы с одного клиента.

$i = 40\%$ – доля выручки, остающаяся у мастеров.

$b_1 = 50 \frac{руб.}{сутки}$ – средние затраты на охрану автомобиля, ожидающего ремонта на стоянке фирмы.

$b_2 = 250 \frac{руб.}{сутки}$ –оплата вынужденного простоя мастера.

$F = cA(1-i) - b_1 L_{оч} - b_2 (n - \bar{k})$ – доход владельца фирмы.

$Z = b_1 L_{оч} + b_2 (n - \bar{k})$ – издержки фирмы.

Наглядной иллюстрацией того, как доход и издержки фирмы меняются в зависимости от количества мастеров, являются рис.3.2.3.1 и 3.2.3.2. Результаты расчетов дохода и издержек фирмы представлены в таблице 3.2.3.

Таблица 3.2.3.

n	Z (руб.)	F (руб.)	p_0	$P_{отк}$	Q	A	$\bar{k}$	$P_{оч}$	$L_{оч}$	$T_{оч}$ (час)
1	140,23	3457,46	0,0006	0,8334	0,1666	1,9987	1,00	0,9955	2,80	5,60
2	129,02	7031,36	0,0014	0,6685	0,3315	3,9780	1,99	0,9656	2,53	5,05
3	122,92	10466,81	0,0018	0,5097	0,4903	5,8832	2,94	0,8920	2,17	4,33
4	134,14	13588,72	0,0020	0,3647	0,6353	7,6238	3,81	0,7699	1,74	3,48
5	177,74	16196,67	0,0022	0,2419	0,7581	9,0969	4,55	0,6115	1,30	2,59
6	265,69	18145,97	0,0023	0,1476	0,8524	10,2287	5,11	0,4428	0,89	1,77
7	401,52	19414,66	0,0024	0,0826	0,9174	11,0090	5,50	0,2913	0,55	1,11
8	579,47	20103,73	0,0024	0,0424	0,9576	11,4907	5,75	0,1745	0,32	0,63
9	788,51	20376,56	0,0024	0,0201	0,9799	11,7584	5,88	0,0956	0,17	0,33
10	1017,3	20391,09	0,0025	0,0089	0,9911	11,8936	5,95	0,0483	0,08	0,16
11	1257,3	20263,93	0,0025	0,0036	0,9964	11,9562	5,98	0,0226	0,04	0,07
12	1502,9	20066,73	0,0025	0,0014	0,9986	11,9831	5,99	0,0098	0,02	0,03
13	1751,1	19837,89	0,0025	0,0005	0,9995	11,9939	6,00	0,0040	0,01	0,01
14	2000,4	19595,83	0,0025	0,0002	0,9998	11,9979	6,00	0,0015	0,00	0,00
15	2250,1	19348,64	0,0025	0,0001	0,9999	11,9993	6,00	0,0006	0,00	0,00
16	2500	19099,58	0,0025	0,0000	1,0000	11,9998	6,00	0,0002	0,00	0,00

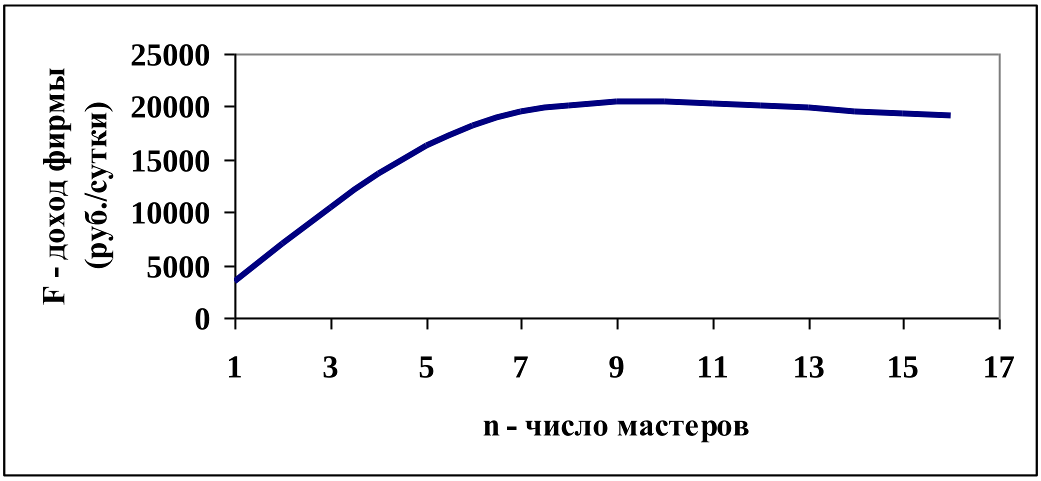


Рис.3.2.3.1. Доход владельца фирмы.

Оптимальное количество мастеров, обеспечивающее владельцу фирмы максимальный доход $\max F = 20391{,}09 \frac{руб.}{сутки}$, равно десяти. При этом среднее время пребывания автомобиля в очереди на ремонт составит 10 мин.

Рис.3.2.3.2. Издержки фирмы.

Оптимальное количество мастеров, обеспечивающее фирме минимальные издержки $\min Z = 122{,}92 \frac{руб.}{сутки}$, равно трем. При этом среднее время пребывания автомобиля в очереди на ремонт составит 4 часа 20 мин.

3.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.3.1. Построить граф состояний и найти с помощью решения уравнений Колмогорова предельные вероятности состояний системы. Интенсивности потоков событий, переводящих систему из одного в другое из имеющихся четырех состояний системы, заданы матрицами λ.

№ 3.3.1.1. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.3.1.2. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
№ 3.3.1.3. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.3.1.4. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

№ 3.3.1.5. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.3.1.6. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 3.3.1.7. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.3.1.8. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 3.3.1.9. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.3.1.10. $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 3.3.2. Рассматриваются торговые ряды с продавцами, предлагающими покупателям продукты одного ассортимента. В течение часа торговые ряды посещают в среднем λ покупателей. Все продавцы обслуживают покупателя в среднем $\bar{t}$ минут. Один покупатель приобретает продукты в среднем на c руб. Покупатели, увидев продавцов, занятых обслуживанием, в очередь не становятся. Владелец торговых рядов отдает i выручки продавцам и оплачивает им вынужденный простой b руб. за час. Определить оптимальное количество продавцов, обеспечивающее владельцу торговых рядов максимальный доход.

№	λ	$\bar{t}$	c	i	b
3.3.2.1.	10	30	700	10%	70
3.3.2.2.	12	30	650	10%	65
3.3.2.3.	15	24	600	15%	60
3.3.2.4.	20	24	550	15%	55
3.3.2.5.	20	18	500	20%	50
3.3.2.6.	30	18	450	20%	45
3.3.2.7.	35	12	400	25%	40
3.3.2.8.	40	12	350	25%	35
3.3.2.9.	50	6	300	30%	30
3.3.2.10.	60	6	250	30%	25

Задача 3.3.3. В течение суток в фирму по гарантийному ремонту бытовой техники обращаются в среднем λ клиентов. Все мастера ремонтируют бытовую технику в среднем $\bar{t}$ часов. Клиент может оставить технику на ремонт независимо от степени занятости мастеров фирмы. Владелец фирмы вынужден тратить на содержание каждой единицы бытовой техники, ожидающей ремонта в среднем b_1 руб. за час, и оплачивать мастерам вынужденный простой b_2 руб. за час. Определить оптимальное количество мастеров, при котором издержки фирмы будут минимальны.

№	λ	$\bar{t}$	b_1	b_2
3.3.3.1.	48	2	10	70
3.3.3.2.	36	2	15	65
3.3.3.3.	32	3	10	60
3.3.3.4.	24	3	15	55
3.3.3.5.	18	4	10	50
3.3.3.6.	12	4	15	45
3.3.3.7.	20	6	10	40
3.3.3.8.	16	6	15	35
3.3.3.9.	10	12	10	30
3.3.3.10.	8	12	15	25

Задача 3.3.4. В течение суток на фирму по ремонту автомобилей обращаются в среднем λ клиентов. Ремонт автомобиля выполняется $\bar{t}$ часов одним мастером в среднем за c руб. Фирма располагает стоянкой для m автомобилей, ожидающих ремонта. Владелец фирмы отдает мастерам i% выручки, оплачивает им вынужденный простой – b_1 руб. за сутки, и тратит на охрану каждого автомобиля, ожидающего ремонта в среднем b_2 руб. в сутки. Определить оптимальные количества мастеров, при которых владелец фирмы будет иметь: а) минимальные издержки, б) максимальный доход.

№	λ	$\bar{t}$	c	m	i	b_1	b_2
3.3.4.1.	10	30	6500	5	10%	10	70
3.3.4.2.	12	30	7000	4	10%	15	65
3.3.4.3.	15	24	5000	3	15%	10	60
3.3.4.4.	20	24	5500	2	15%	15	55
3.3.4.5.	20	18	3500	4	20%	10	50
3.3.4.6.	30	18	4000	3	20%	15	45
3.3.4.7.	35	12	2000	3	25%	10	40
3.3.4.8.	40	12	2500	2	25%	15	35
3.3.4.9.	50	6	1000	5	30%	10	30
3.3.4.10.	60	6	1500	4	30%	15	25

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Граф задается двумя множествами – непустым множеством X и множеством U, причем элементами множества U являются пары элементов множества X. Граф, заданный на множествах X и U, обозначается: $G=(X,U)$.

Если элементы множества U не упорядочены, то граф называется неориентированным, в противном случае ориентированным или орграфом.

Элементы множества X называются ***вершинами*** графа, а элементы множества U - ***ребрами*** для неориентированного графа и ***дугами*** для орграфа.

На плоскости вершины графа могут задаваться в виде точек, кружков или прямоугольников. Дугами и ребрами являются линии, которые соединяют вершины, соответственно направленные или нет.

Основные понятия для неориентированного графа

Ребро графа, начало, и конец которого совпадают, называется ***петлей***.

Вершины графа называются ***смежными***, если существует ребро их соединяющее.

Вершина и ребро графа называются ***инцидентными***, если вершина является началом или концом ребра.

Степенью вершины графа называется число инцидентных ей ребер.

Вершина графа, степень которой равна нулю, называется ***изолированной***.

Вершина графа, степень которой равна единице, называется ***тупиковой или висячей***.

Граф называется ***регулярным***, если все его вершины имеют одинаковую степень.

Граф называется ***взвешенным***, если каждому ребру поставлено в соответствие число, называемое ***весом ребра***.

Граф называется ***двудольным***, если множество его вершин может быть разделено на два непересекающихся подмножества так, что каждая вершина одного подмножества соединена с каждой вершиной другого подмножества.

Маршрутом называется последовательность вершин и ребер графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего. ***Длина маршрута*** определяется количеством входящих в него ребер.

Цепью называется маршрут, в котором все ребра попарно различны. ***Простой цепью*** называется цепь, в которой все вершины попарно различны.

Граф называется ***связанным***, если для любых его вершин существует цепь, соединяющая эти вершины.

Циклом называется цепь, начало и конец которой совпадают. Цикл называется ***эйлеровым***, если он содержит все ребра графа. Связанный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется ***эйлеровым***.

Деревом называется связанный граф без циклов.

Примером графа может служить сеть железнодорожных дорог. Здесь вершинами являются железнодорожные станции, ребрами – железнодорожные пути, а весом ребра – расстояния между железнодорожными станциями.

Основные понятия для ориентированного графа (орграфа)

Для ориентированного графа основные понятия и определения сохраняются, но есть и некоторые отличия.

Последовательность дуг, в которой конец одно дуги совпадает с началом другой, называется ***путь***.

Путь называется ***простым***, если в нем дуга не встречается дважды. В противном случае путь называется ***составным***.

Путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды, называется ***элементарным***.

Контуром называется путь, который начинается и заканчивается в одной вершине.

Для ориентированного графа вместо степени вершины вводят понятия ***полустепени исхода и захода***.

Если вершина является началом дуги, то дуга называется ***исходящей из вершины***, если концом, то ***заходящей в вершину***.

Полустепенью исхода вершины называется число исходящих из вершины дуг.

Полустепенью захода вершины называется число заходящих в вершину дуг.

Матрицы смежности и инцидентности графа

Для обработки и анализа графов используется их задание в виде матриц смежности и инцидентности.

Матрицей смежности графа, содержащего n вершин, называется квадратная матрица A n- порядка, элементы которой определяются следующим образом:

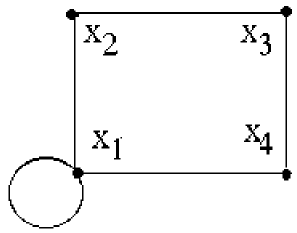
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если вершины } i \textit{ и } j \textit{ соединены ребром(дугой)} \\ 0, \qquad \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Замечание. Матрицей смежности можно задавать, как ориентированный, так и неориентированный граф. Матрица инцидентности используется для задания только орграфов.

Матрицей инцидентности для ориентированного графа, содержащего n вершин и m дуг, называется прямоугольная матрица B размером $n \times m$, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если вершина i начало дуги} \\ -1, \textit{если вершина i конец дуги} \\ 2, \textit{если вершина i и начало и конец дуги} \\ 0, \textit{если вершина i и дуга не инцидентны} \end{cases} \qquad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}.$$

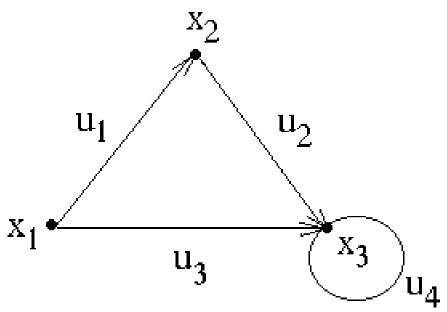
Задача 4.1.1. Найти матрицу смежности для неориентированного графа:



Решение.

$$\underset{4\times 4}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.1.2. Найти матрицу инцидентности для орграфа:



Решение.

$$\underset{3\times 4}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2. ПОНЯТИЕ СЕТИ

Вершина графа, у которой имеются только исходящие инцидентные дуги или только заходящие инцидентные дуги, называется ***полюсом***.

Сеть – это взвешенный двухполюсный орграф без петель. Обозначение сети $S=(N,U)$, где N – множество вершин, U – множество дуг.

Признаки сети:

1. Существует только одна вершина $s \in N$, в которую не заходит ни одна дуга. Вершина s называется ***истоком (входом)*** сети.
2. Существует только одна вершина $t \in N$, из которой не выходит ни одна дуга. Вершина t называется ***стоком (выходом)*** сети.
3. Каждой дуге $u=(i,j) \in U$, где $i,j \in N$, поставлено в соответствие число $c(u)=c(i,j)$, которое называется ***пропускной способностью дуги***.

Пример сети:

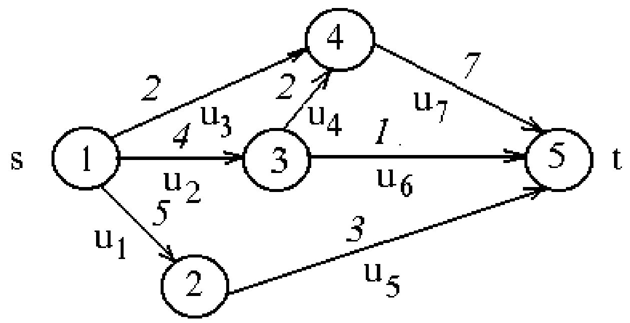


Рис.4.2.1.

$N=(s=1,2,3,4,t=5), U=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7)$, где

$u_1=(1,2), u_2=(1,3), u_3=(1,4), u_4=(3,4), u_5=(2,5), u_6=(3,5), u_7=(4,5)$ и

$c(1,2)=5, c(1,3)=4, c(1,4)=2, c(3,4)=2, c(2,5)=3, c(3,5)=1, c(4,5)=7$.

4.2.1. Поток в сети и его свойство

Потоком в сети от истока $s \in N$ к стоку $t \in N$ называется неотрицательная функция $\varphi(u)=\varphi(i,j)$, определенная на множестве дуг U, которая обладает следующими свойствами:

1. Поток по каждой дуге $u=(i,j) \in U$ не превышает пропускной способности дуги $c(u)=c(i,j)$, т.е.

   $$0 \le \varphi(u) \le c(u) \quad \text{или} \quad 0 \le \varphi(i,j) \le c(i,j).$$

2. Величина потока, входящего в каждую вершину сети $i \in N$, равна величине потока, выходящего из этой вершины, кроме вершин истока и стока $(i \ne s,t)$, т.е.

   $$\sum_{j \in N_i} \varphi(i,j) = \sum_{j \in N_i} \varphi(j,i) \ ,$$

где $\overline{N_i}$ - множество вершин, инцидентных дугам исходящих из вершины i,

N_i - множество вершин, инцидентных дугам входящих в вершину i.

Из свойств потока следует:

1. Величина потока V, входящего в сеть, равна величине потока, исходящего из сети:
$$\sum_{j\in\overline{N_s}}\varphi(s,j)=\sum_{j\in N_t}\varphi(j,t)=V.$$
2. Так как поток в сети $\varphi(i,j)$ по каждой дуге $u=(i,j)\in U$ ограничен пропускной способностью $c(i,j)$ и число дуг конечно, то величина потока V в сети ограничена
$$V\ \le\ V_{max},$$

т.е. существует максимальная величина потока в сети V_{max}.

Общая постановка задачи определения максимального потока в сети

(4.2.1.1) План $\varphi(i,j)$ – ?

(4.2.1.2) Цель $V=\sum_{j\in\overline{N_s}}\varphi(s,j)=\sum_{j\in N_t}\varphi(j,t)\to\max$

(4.2.1.3) Система ограничений $\begin{cases}0\le\varphi(i,j)\le c(i,j)\\ \sum\limits_{j\in\overline{N_i}}\varphi(i,j)-\sum\limits_{j\in N_i}\varphi(j,i)=0\end{cases}$

Это задача линейного программирования.

4.2.2. Понятие разреза в сети. Теорема о максимальном потоке и о минимальном разрезе

Множество вершин сети может быть разделено на два непересекающихся подмножества N_p и $\overline{N_p}$ так, чтобы исток сети принадлежал множеству N_p ,а сток сети множеству $\overline{N_p}$ $(s\in N_p,t\in\overline{N_p})$.Множество дуг U_p, принадлежащих множеству U $(U_p\subset U)$ и соединяющих вершины подмножеств N_p и $\overline{N}_p$(или инцидентных вершинам s и t), называется ***разрезом***. Разрез характеризуется величиной $C(N_{p,}\overline{N}_p)$. ***Величина разреза*** равна сумме пропускных способностей дуг, составляющих разрез U_p:
$$C(N_{p,}\overline{N}_p)=\sum_{u\in U_p}c(u)=\sum_{(i,j)\in U_p}c(i,j).$$

Минимальным разрезом в сети называется разрез, имеющий минимальную величину разреза $min\ C(N_{p,}\overline{N}_p)$.

Теорема Форда – Фалкерсона. Величина максимального потока в сети равна величине минимального разреза, отделяющего исход от стока (вход и выход) сети:
$$maxV=minC(N_{p,}\overline{N}_p).$$

Задача 4.2.2. Построить разрезы и определить величину максимального потока в сети на рис.4.2.1.

Решение.

Множество вершин N делятся на подмножества $N_p(1)$ и $\overline{N}_p(2,3,4,5)$, тогда

$U_p = \{(1,2);(1,3);(1,4)\}$. Отсюда $C(N_{p,}\overline{N}_p) = c(1,2)+c(1,3)+c(1,4) = 11$.

Аналогично:

$N_p(1,2)$ и $\overline{N}_p(3,4,5)$, тогда $U_p = \{(1,3);(1,4);(2,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 9$.

$N_p(1,3)$ и $\overline{N}_p(2,4,5)$, тогда $U_p = \{(1,2);(1,4);(3,4);(3,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 10$.

$N_p(1,4)$ и $\overline{N}_p(2,3,5)$, тогда $U_p = \{(1,2);(1,3);(4,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 16$.

$N_p(1,2,3)$ и $\overline{N}_p(4,5)$, тогда $U_p = \{(1,4);(3,4);(2,5);(3,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 8$.

$N_p(1,2,4)$ и $\overline{N}_p(3,5)$, тогда $U_p = \{(1,3);(2,5);(4,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 11$.

$N_p(1,3,4)$ и $\overline{N}_p(2,5)$, тогда $U_p = \{(1,2);(3,5);(4,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 13$.

$N_p(1,2,3,4)$ и $\overline{N}_p(5)$, тогда $U_p = \{(1,4);(3,4);(2,5);(3,5)\}$ и $C(N_{p,}\overline{N}_p) = 11$.

Следовательно, величина максимального потока по теореме Форда-Фалкерсона равна $maxV = 8$ ед.

4.2.3. Построение максимального потока методом ненасыщенных путей

Дуга сети называется ***насыщенной***, если поток по этой дуге равен ее пропускной способности, т.е. если $\varphi(i,j)=C(i,j)$, то дуга $u=(i,j)$ насыщена.

Дуга сети называется ***ненасыщенной***, если поток по этой дуге меньше ее пропускной способности, т.е. если $\varphi(i,j) < C(i,j)$, то дуга $u=(i,j)$ не насыщена.

Путь в сети называется ***ненасыщенным***, если он состоит из ненасыщенных дуг. Путь в сети называется ***насыщенным***, если он содержит хотя бы одну насыщенную дугу.

Алгоритм построения максимального потока в сети основан на том, чтобы сделать все полные пути в сети насыщенными.

Алгоритм построения максимального потока в сети методом ненасыщенных путей

1. Построение первоначального потока, используя условие сохранения потока в вершинах сети, кроме вершин истока и стока. Это нулевой шаг.
   Иногда в качестве первоначального потока выбирают нулевой поток:

$$\varphi(i,j)=0 \text{ при любых значениях } i,j \in N.$$

2. Следует организовать процедуру составления подмножества вершин графа, достижимых из входа по путям, состоящим из ненасыщенных ребер. Если выход сети попадает в подмножество вершин, то построенный поток не является максимальным, если не попадает, то построенный поток является максимальным и его величина равна

$$\max V = \sum_{j \in N_s} \varphi(s, j) = \sum_{j \in N_t} \varphi(j, t) \ .$$

3. Если поток не является максимальным, то следует выделить полный путь из истока s в сток t ,состоящий из ненасыщенных ребер, и увеличить потоки по всем ребрам этого пути на величину

$$\Delta\varphi = \min_{(i,j)} (c_{ij} - \varphi_{ij}),$$

где (i, j) – ребра рассматриваемого пути. В результате получим новый поток в сети, и следует перейти ко второму пункту алгоритма.

Матрицы пропускной способности сети и потока в сети

Для построения максимального потока в сети используются ***матрица пропускной способности сети*** C и ***матрица потока в сети*** φ.

Пусть дана сеть с n вершинами, в которой каждому ребру (дуге) поставлено в соответствие одно число. Если в сети направления не заданы, то пропускная способность ребер, кроме дуг инцидентных истоку s и стоку t сети, в обоих направлениях считается одинаковой и для элементов матрицы пропускной способности выполняется соотношение

$c_{ij} = c_{ji}, \ i = \overline{2,n-1}; j = \overline{2,n-1}.$

Элементы, связанные с дугами инцидентными истоку s и стоку t сети, равны $c_{sj} = c(s, j),\ c_{js} = 0,\ j = \overline{1,n};\ c_{it} = c(i,t),\ c_{ti} = 0,\ i = \overline{1,n}$. Если в сети направления заданы, то элементы матрицы пропускной способности равны $c_{ij} = c(i, j)$ по дуге (i, j) и $c_{ji} = 0$ в обратном направлении, $i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}$.

Пусть дана сеть с n вершинами, пропускная способность которой в обоих направлениях различна. В этом случае каждому ребру сети поставлено в соответствие два числа: $(c(i, j), c(j,i))$, где $i < j$. Тогда элементы матрицы пропускной способности равны $c_{ij} = c(i, j)$ и $c_{ji} = c(j,i)$, $i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}$.

Для элементов матрицы потока сети выполняется соотношение $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$, $i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}$. Таким образом, в матрице потока задается не только величина потока на каждой дуге, но и направление потока. Если $\varphi_{ij} > 0$, то поток направлен от вершины i к вершине j. Если $\varphi_{ij} < 0$, то поток направлен от вершины j к i.

Задача 4.2.3.1. Определить максимальный поток в сети, приведенной на рис.4.2.2, методом ненасыщенных путей.

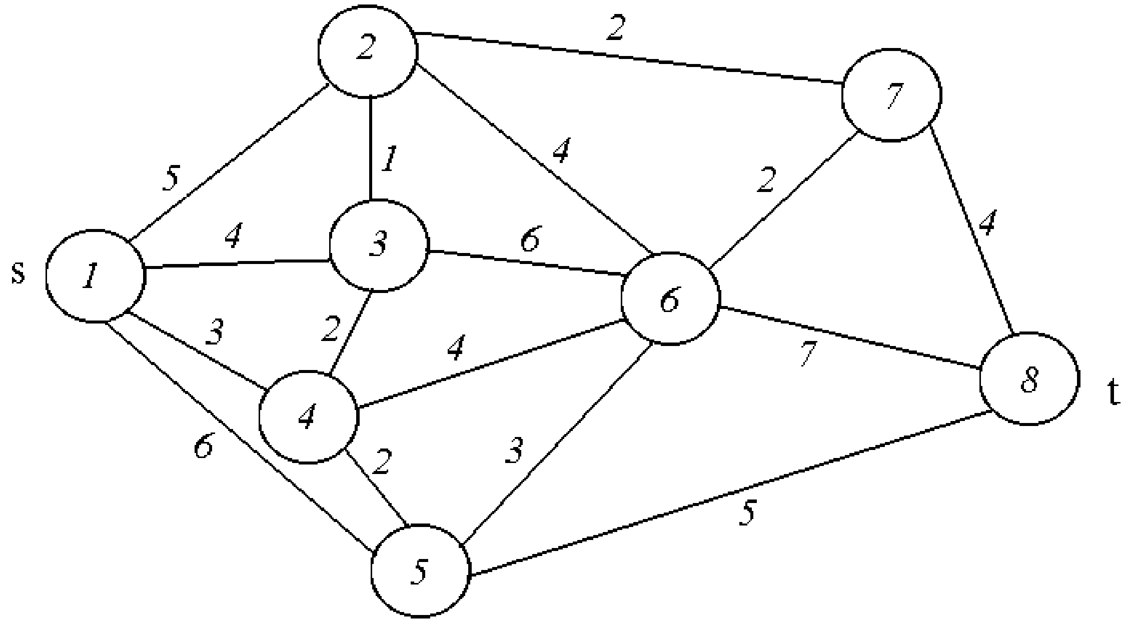


Рис.4.2.3.1.

Решение. Запишем матрицу пропускной способности сети:

$$\underset{8\times 8}{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим первоначальный поток. Рассмотрим путь, идущий по следующим вершинам 1→2→7→8. Максимальный поток, который можно пропустить по дугам этого пути, равен минимальному значению пропускных способностей его дуг $c(i,j)$, т.е. 2ед., т.к. значение потока по дуге не может превышать ее пропускную способность. Аналогично по путям 1→3→6→8 и 1→5→8 максимальное значение потока, которое можно задать, равно соответственно 4ед. и 5 ед. Первоначальный поток построен.

Составим матрицу потока в сети на нулевом шаге:

$$\underset{8\times 8}{\varphi^{(0)}}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить ненасыщенные дуги, определим разности между пропускными способностями и потоком в сети

$$\Delta\varphi = C-\varphi^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 4 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы укажем любой ненасыщенный путь из истока к стоку. Например, (1,2)→(2,6) → (6,8). По каждой дуге этого пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi=\min\,(c_{ij}-\varphi^{(0)}{}_{ij})=\min(3,4,3)=3$. Для полученного нового потока в сети составим матрицу потока:

$$\varphi^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -7 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу разности пропускных способностей дуг и полученного потока в сети:

$$\Delta\varphi = C - \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы определим наличие любого ненасыщенного полного пути из истока в сток. Например, путь по дугам (1,4)→(4,6)→(6,7)→(7,8). По каждой дуге этого пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi = \min\,(c_{ij} - \varphi^{(1)}{}_{ij}) = \min(3,4,2,2) = 2$. Для полученного нового потока в сети составим матрицу потока:

$$\varphi_I^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу разности пропускных способностей дуг и полученного потока в сети:

$$\Delta\varphi = C - \varphi_I^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы нельзя построить ни одного полного ненасыщенного пути из истока в сток рассматриваемой сети. Следовательно, максимальный поток построен $\varphi_{\max} = \varphi_I^{(2)}$. Величина максимального потока в сети равна $V_{max} = V^{(2)} = 16$. Полученный максимальный поток не является единственным, т.к. на каждом шаге полные ненасыщенные пути можно было выбирать по-разному. Например, на последнем (втором) шаге можно было также выбрать полные ненасыщенные пути: (1,4)→(4,5)→(5,6)→(6,7)→(7,8) (II путь) и (1,4)→(4,3)→(3,6)→(6,7)→(7,8) (III путь).

По каждой дуге II пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi = \min\,(c_{ij} - \varphi^{(1)}{}_{ij}) = \min(3,2,3,2,2) = 2$. Для полученного нового потока в сети составим матрицу потока:

$$\varphi_{II}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -2 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу разности пропускных способностей дуг и полученного потока в сети:

$$\Delta\varphi = C - \varphi_{II}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы нельзя построить ни одного полного ненасыщенного пути из истока в сток рассматриваемой сети. Следовательно, максимальный поток построен $\varphi_{\max} = \varphi_{II}^{(2)}$. Величина максимального потока в сети равна $V_{max} = V^{(2)} = 16$. По каждой дуге III пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi = \min\,(c_{ij} - \varphi^{(1)}{}_{ij}) = \min(3,2,2,2,2) = 2$. Для полученного нового потока в сети составим матрицу потока:

$$\varphi_{III}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу разности пропускных способностей дуг и полученного потока в сети:

$$\Delta\varphi=C-\varphi_{III}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы нельзя построить ни одного полного ненасыщенного пути из истока в сток рассматриваемой сети. Следовательно, максимальный поток построен $\varphi_{\max}=\varphi_{III}^{(2)}$. Величина максимального потока в сети равна $V_{max}=V^{(2)}=16$.

Задача 4.2.3.2. Определить максимальный поток в сети (см. рис.4.2.3.2), пропускная способность которой в обоих направлениях различна $c_{ij}\neq c_{ji}$. Пропускная способность ребра (i,j) задается двумя значениями (c_{ij},c_{ji}), где $i<j$.

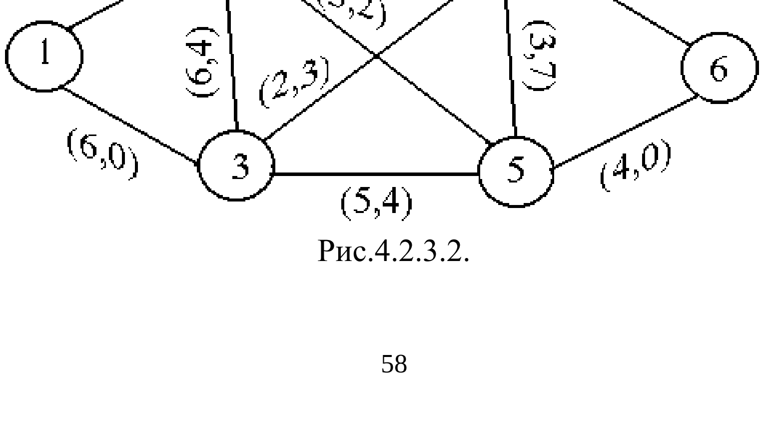


Рис.4.2.3.2.

Решение. Составляется матрица пропускной способности данной сети:

$$\underset{6\times 6}{C}=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим первоначальный поток. Рассмотрим путь, идущий по следующим вершинам 1→2→5→6. Максимальный поток, который можно пропустить по дугам этого пути, равен минимальному значению пропускных способностей его дуг $c(i,j)$ $min(8,3,4)=3$ед. Аналогично по пути 1→3→5→4→6 максимальное значение потока, которое можно задать, равно $min(6,5,7,9)=5$ед. Первоначальный поток построен. Составим матрицу потока в сети на нулевом шаге:

$$\varphi^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу разности пропускной способности и полученного потока:

$$C-\varphi^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы определим наличие любого ненасыщенного полного пути из истока в сток. Например, путь по дугам (1,2)→(2,3)→(3,4)→(4,6). По каждой дуге этого пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi=\min\,(c_{ij}-\varphi^{(1)}{}_{ij})=\min(5,6,2,4)=2$ ед. Для полученного нового потока в сети составим матрицу потока:

$$\varphi^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу разности пропускной способности и полученного потока:

$$C-\varphi^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы определим наличие любого ненасыщенного полного пути из истока в сток. Например, путь по дугам (1,3)→(3,2)→(2,4)→(4,6). По каждой дуге этого пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi = \min\,(c_{ij} - \varphi^{(1)}{}_{ij}) = \min(1,6,1,2) = 1$ед. Для полученного нового потока в сети составим матрицу потока:

$$\varphi_I^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу разности пропускной способности сети и полученного потока:

$$C-\varphi_I^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы нельзя построить ни одного полного ненасыщенного пути из истока в сток рассматриваемой сети. Следовательно, максимальный поток построен $\varphi_{\max} = \varphi_I^{(2)}$. Величина максимального потока в сети равна $V_{\max} = V_I^{(2)} = 11$.

Полученный максимальный поток не является единственным. Например, на последнем (втором) шаге можно было также выбрать полный ненасыщенный путь: (1,2)→(2,4)→(4,6) (II путь). По каждой дуге II пути поток можно увеличить на величину $\Delta\varphi = \min\,(c_{ij} - \varphi^{(1)}{}_{ij}) = \min(3{,}1{,}2) = 1$ед. Для полученного потока в сети составим матрицу:

$$\varphi_{II}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая матрица разности пропускной способности и полученного потока в сети равна:

$$C - \varphi_{II}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы нельзя построить ни одного полного ненасыщенного пути из истока в сток рассматриваемой сети. Следовательно, максимальный поток построен $\varphi_{\max} = \varphi_{II}^{(2)}$. Величина максимального потока в сети равна $V_{max} = V_{II}^{(2)} = 11$.

4.3. ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСА ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ РАБОТ

4.3.1. Основные понятия и определения

Комплекс работ может быть представлен в виде связанного орграфа без контуров (сеть). Дуги графа соответствуют ***работам***, вершины графа соответствуют конечным результатам работ – ***исходам или событиям***.

Правила составления сетевого графика:

1. Перед построением сетевого графика необходимо составить список всех работ, указать для каждой работы ее продолжительность, конечный результат – событие, а также предшествующие и последующие работы.
2. Сетевой график изображается слева направо. Каждое событие с большим порядковым номером стараются изобразить правее предыдущего. Направление дуг, изображающих работы, должно быть слева направо. Каждая дуга - работа должна выходить из вершины – события с меньшим номером и входить в вершину – событие с большим номером.
3. Два соседних события могут быть соединены одной дугой – работой. Для изображения параллельных работ вводят промежуточные события и фиктивные работы с нулевым временем исполнения. Дуги фиктивных работ обычно изображаются пунктирными линиями.
4. В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных вершин – событий, из которых не выходит ни одна дуга – работа, кроме стока сети.
5. В сети не должно быть промежуточных вершин – событий, которым не предшествует ни одна дуга – работа, кроме истока сети.
6. В сети не должно быть связанных контуров.

Пример сетевого графика:

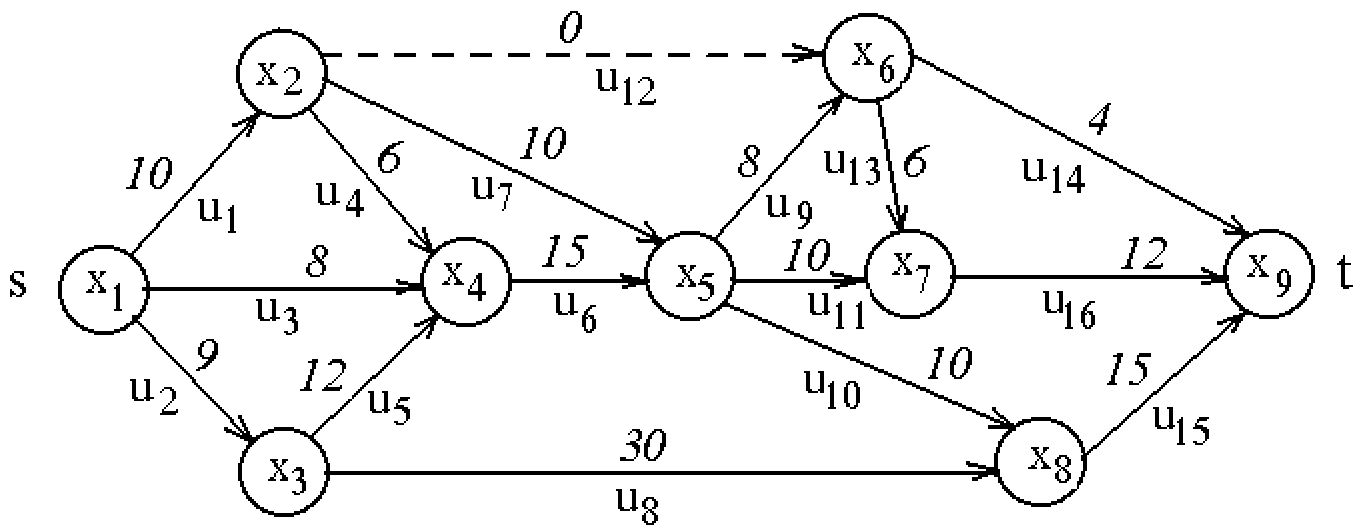


Рис.4.3.1.1.

Рассматриваемый сетевой график содержит 16 работ и 9 событий.

После того, как сетевой график составлен согласно указанным правилам, необходимо правильно пронумеровать работы. Для этого используется ***алгоритм Фалкерсона:***

Нумерация начинается с исходного события – вершины. Первая группа событий состоит из одной вершины – истока сети. Вычеркиваются все исходящие из него дуги – работы. Это будет первая группа работ. Далее находят события – вершины, которых не имеют входящих дуг – работ. Это будет вторая группа событий – вершин. Снова удаляются все дуги – работы, исходящие из вершин второй группы. Это будет вторая группа работ. Находят новые события – вершины, которые не имеют входящих дуг и получают третью группу событий. Таких групп может быть много. В последней группе будет находиться одно событие - сток сети. Нумерация в одной группе событий выполняется сверху вниз.

Ниже проведена правильная нумерация приведенного сетевого графа.

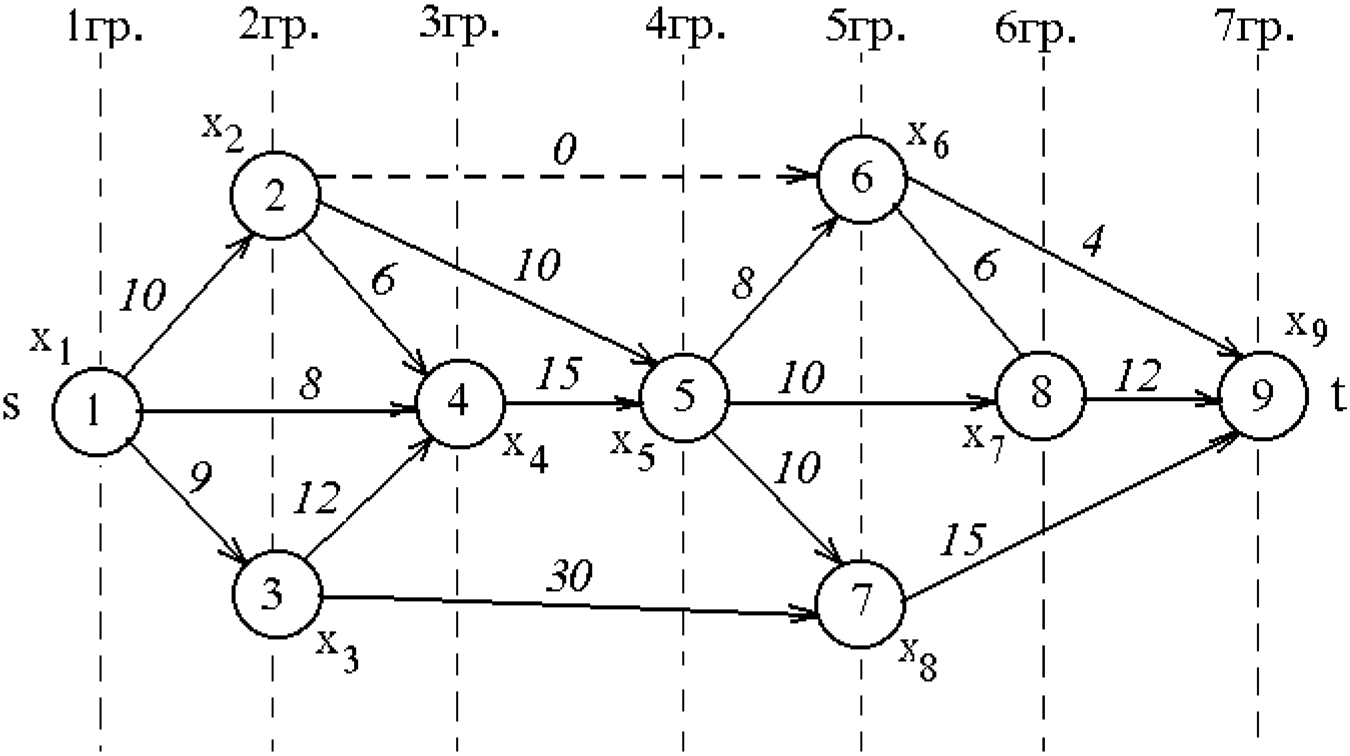


Рис.4.3.1.2.

В полученной сети $N=(s=1,2,3,4,5,6,7,8,t=9)$ и

$$U=(u_1=(1,2),u_2=(1,3),u_3=(1,4),u_4=(2,4),u_5=(3,4),u_6=(4,5),u_7=(2,5),u_8=(3,7),$$
$$u_9=(5,6),u_{10}=(5,7),u_{11}=(5,8),u_{12}=(2,6),u_{13}=(6,8),u_{14}=(6,9),u_{15}=(7,9),u_{16}=(8,9)).$$

4.3.2. Анализ сетевых моделей

Временной анализ сетевой модели позволяет определить:

- ***Критический срок выполнения комплекса работ***.
- ***Резервы времени событий***.
- ***Резервы времени работ***.

Критические путь и срок выполнения комплекса работ

Путь – это любая последовательность работ сетевой модели, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием последующей работы. ***Полный путь*** – это любой путь, начало которого совпадает с исходным событием, а конец - с завершающим событием.

Критический путь – это наиболее протяженный по времени полный путь. Его продолжительность определяет критический (минимальный) срок выполнения всего комплекса работ $T_{кр}$. ***Критическими*** называются также работы и события, расположенные на этом пути.

Временные параметры событий

1. t_i^p - ***ранний срок наступления события*** i. Ранний срок наступления события i определяется длительностью максимального пути до события i:

   (4.3.2.1) $t_i^p = \max\limits_{L_{ni}} t(L_{ni}),$

где L_{ni} - любой путь, предшествующий событию i.

Ранний срок наступления события *j* вычисляется по формуле:

(4.3.2.2) $t_j^p = \max\limits_{(i,j)}(t_i^p + t_{ij}),$

где (i,j) – предшествующие событию *j* работы, t_{ij} - длительность работы (i,j).

Замечание. Предполагается, что ранний срок наступления начального события равен нулю $t^p_{нач.событие} = 0$. Из определения получают, что ранний срок наступления конечного события равен критическому сроку выполнения всего комплекса работ $t^p_{кон.событие} = T_{кр}$.

2. t_i^n – ***поздний (или предельный) срок наступления события*** i, при котором общий срок выполнения работ не изменится.

   (4.3.2.3) $t_i^n = T_{кр} - \max\limits_{L_{ci}}(L_{ci}),$

где L_{ci} - любой путь, следующий от *i* до завершающего (конечного) события.

Поздний срок наступления *i* события вычисляется по формуле:

(4.3.2.4) $t_i^n = \min\limits_{(i,j)}(t_j^n - t_{ij}),$

где *(i,j)* – работы, следующие за событием i.

Замечание. Поздний срок наступления конечного (завершающего) события равен критическому времени выполнения всего комплекса работ

$t^n_{кон.события} = T_{кр}$.

3. R_i – ***резерв времени*** i ***события.*** Резерв времени i события вычисляется по формуле:

   (4.3.2.5) $R_i = t_i^n - t_i^p$.

Резерв времени i события показывает период времени, на который можно задержать выполнение i события без изменения общего срока выполнения всего комплекса работ (критическому времени) $T_{кр}$.

События, которые не имеют резервов времени, называются критическими.

Задача 4.3.2.1. Определить временные параметры событий комплекса работ, моделируемого сетью, представленной на рисунке 4.3.1.2.

Решение. Начальные сроки событий определяют по формуле (4.3.2.2), начиная с первого события по порядку следования номеров:

$$t_1^p = 0$$
$$t_2^p = t_1^p + t_{12} = 10$$
$$t_3^p = t_1^p + t_{13} = 9$$
$$t_4^p = max(t_1^p + t_{14}, t_2^p + t_{24}, t_3^p + t_{34}) = max(8,16,21) = 21$$
$$t_5^p = max(t_2^p + t_{25}, t_4^p + t_{45}) = max(20,36) = 36$$
$$t_6^p = max(t_2^p + t_{26}, t_5^p + t_{56}) = max(10,44) = 44$$
$$t_7^p = max(t_3^p + t_{37}, t_5^p + t_{57}) = max(39,46) = 46$$
$$t_8^p = max(t_5^p + t_{58}, t_6^p + t_{68}) = max(46,50) = 50$$
$$t_9^p = max(t_6^p + t_{69}, t_7^p + t_{79}, t_8^p + t_{89}) = max(48,61,62) = 62 = T_{кр}.$$

Конечные сроки событий определяют по формуле (4.3.2.4), начиная с заключительного события по порядку убывания номеров:

$$t_9^n = t_9^p = T_{кр} = 62$$
$$t_8^n = t_9^n - t_{89} = 50$$
$$t_7^n = t_9^n - t_{79} = 47$$
$$t_6^n = min(t_8^n - t_{68}, t_9^n - t_{69}) = min(44,58) = 44$$
$$t_5^n = \min(t_6^n - t_{56}, t_7^n - t_{57}, t_8^n - t_{58}) = \min(36,37,40) = 36$$
$$t_4^n = t_5^n - t_{45} = 21$$
$$t_3^n = min(t_4^n - t_{34}, t_7^n - t_{37}) = min(9,17) = 9$$
$$t_2^n = min(t_4^n - t_{24}, t_5^n - t_{25}) = min(15,26) = 15$$
$$t_1^n = min(t_2^n - t_{12}, t_3^n - t_{13}, t_4^n - t_{14}) = min(5,0,13) = 0.$$

Резервы времени событий определяют по формуле(4.3.2.5). В таблице 4.3.2.1 приведены все временные параметры событий. Резервы времени имеют два события 2 и 7, все остальные события являются критическими.

Таблица 4.3.2.1.

Событие i	t_i^p	t_i^n	R_i
1	0	0	0
2	10	15	5
3	9	9	0
4	21	21	0
5	36	36	0
6	44	44	0
7	46	47	1
8	50	50	0
9	62	62	0

Временные параметры работ

1. ***Ранний срок начала работы*** $t_{ij}^{р.н}$ – наиболее ранний из возможных моментов наступления работы (i, j), равен раннему времени наступления события i:
   (4.3.2.6) $t_{ij}^{р.н} = t_i^p$.

2. ***Ранний срок окончания работы*** (i, j):
   (4.3.2.7) $t_{ij}^{р.о} = t_{ij}^{р.н} + t_{ij}$.

3. ***Поздний срок окончания работы*** (i, j) равен позднему времени наступления события j:
   (4.3.2.8) $t_{ij}^{п.о} = t_j^n$.

4. ***Поздний срок начала работы (i,j)***:
   (4.3.2.9) $t_{ij}^{п.н} = t_{ij}^{п.о} - t_{ij}$.

5. ***Полный резерв времени работы*** (i, j) характеризует максимальное время, на которое можно отложить начало или окончание работы без изменения общего срока выполнения всего комплекса работ (критическому времени) $T_{кр}$:
   (4.3.2.10) $r_{ij}^{пол} = t_{ij}^{п.о} - t_{ij}^{р.о} = t_j^n - t_i^p - t_{ij}$.

6. ***Свободный резерв времени работы*** (i, j) характеризует максимальное время, на которое можно отложить начало или окончание работы без изменения критическому времени комплекса работ $T_{кр}$ при условии, что все события в сети наступят в свои ранние сроки:
(4.3.2.11) $r_{ij}^{св} = t_j^p - t_i^p - t_{ij} = r_{ij}^{пол} - R_j$.

Работы, которые не имеют резервов времени, называются критическими.

Критический путь проходит по критическим событиям и работам.

Задача 4.3.2.2. Определить временные параметры работ комплекса работ, представленного на рисунке 4.3.1.2, и указать критический путь.

Решение.

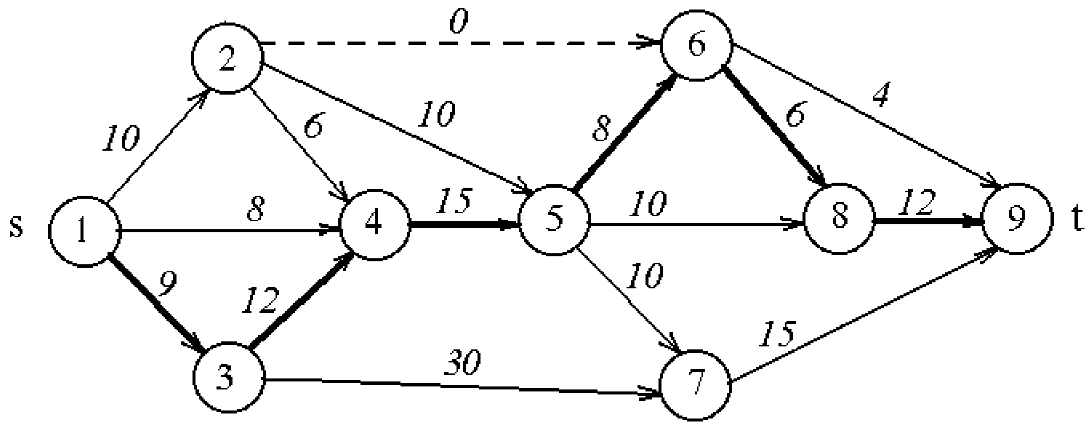


Рис.4.3.1.2

Временные параметры работ определяют, используя временные параметры событий (таблица 4.3.2.2) и время выполнения работ t_{ij}, в следующем порядке:

1. ранний срок начала работы $t_{ij}^{р.н}$ (4.3.2.6);
2. ранний срок окончания работы $t_{ij}^{р.о}$ (4.3.2.7);
3. поздний срок окончания работы $t_{ij}^{п.о}$ (4.3.2.8);
4. поздний срок начала работы $t_{ij}^{п.н}$ (4.3.2.9);
5. полный резерв времени работы $r_{ij}^{пол}$ (4.3.2.10);
6. свободный резерв времени работы $r_{ij}^{св}$ (4.3.2.11).

В таблице приведены временные параметры работ для рассматриваемой сети.

Таблица 4.3.2.2.

Работы (i,j)	t_{ij}	$t_{ij}^{р.н}$	$t_{ij}^{р.о}$	$t_{ij}^{п.н}$	$t_{ij}^{п.о}$	$r_{ij}^{пол}$	$r_{ij}^{св}$	R_j
(1,2)	10	0	10	5	15	5	0	5
(1,3)	9	0	9	0	9	0	0	0
(1,4)	8	0	8	13	21	13	13	0
(2,4)	6	10	16	15	21	5	5	0
(3,4)	12	9	21	9	21	0	0	0
(4,5)	15	21	36	21	36	0	0	0
(2,5)	10	10	20	26	36	16	16	0
(3,7)	30	9	39	17	47	8	7	1
(5,6)	8	36	44	36	44	0	0	0
(5,7)	10	36	46	37	47	1	0	1
(5,8)	10	36	46	40	50	4	4	0
(2,6)	0	10	10	44	44	34	34	0
(6,8)	6	44	50	44	50	0	0	0
(6,9)	4	44	48	58	62	14	14	0
(7,9)	15	46	61	47	62	1	1	0
(8,9)	12	50	62	50	62	0	0	0

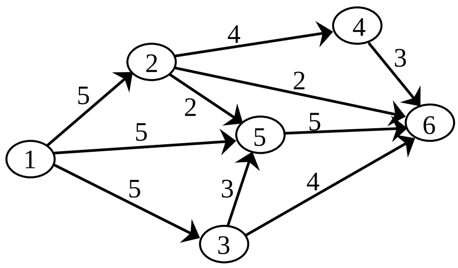
Работы $u_2 = (1,3), u_5 = (3,4), u_6 = (4,5), u_9 = (5,6), u_{13} = (6,8)$ и $u_{16} = (8,9)$ составляют критический путь. На рис.4.3.2 критический путь указан жирной линией. Длина критического пути равна критическому времени выполнения комплекса работ $T_{кр} = t_{13} + t_{34} + t_{45} + t_{56} + t_{68} + t_{89} = 62.$

4.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

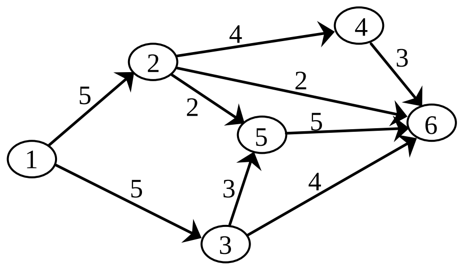
Задача 4.4.1. На сети указаны пропускные способности дуг. Требуется:

- ✓ Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока в сток;
- ✓ Выписать дуги, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

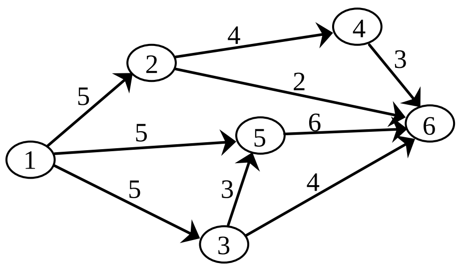
№ 4.4.1.1



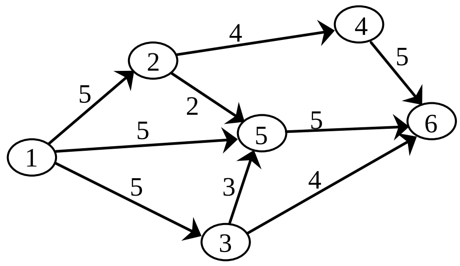
№ 4.4.1.2



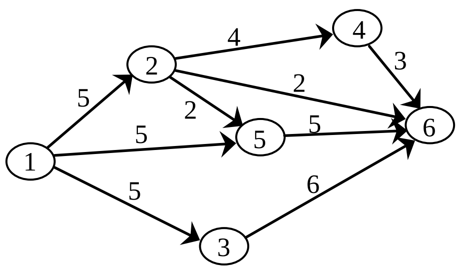
№ 4.4.1.3



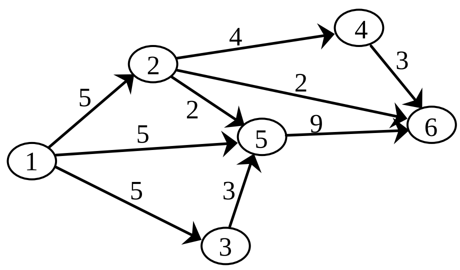
№ 4.4.1.4



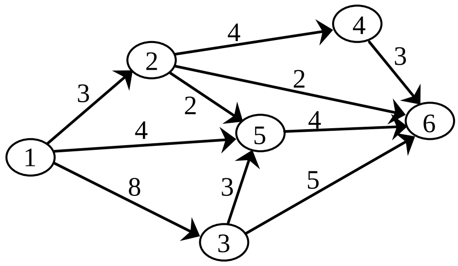
№ 4.4.1.5



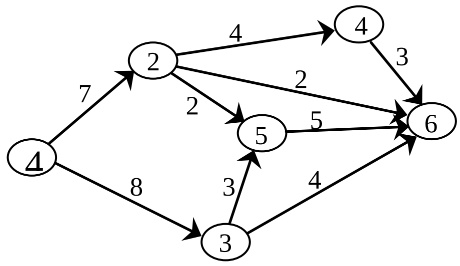
№ 4.4.1.6



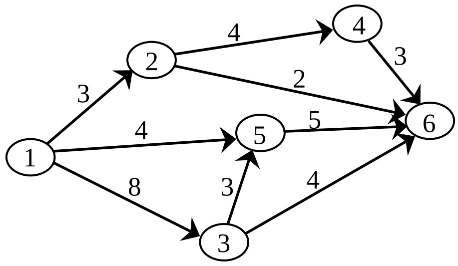
№ 4.4.1.7



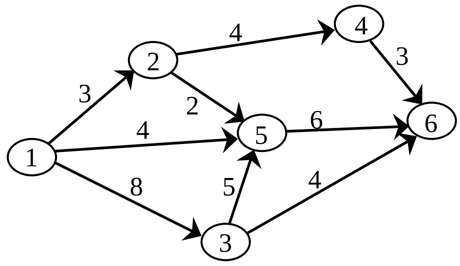
№ 4.4.1.8



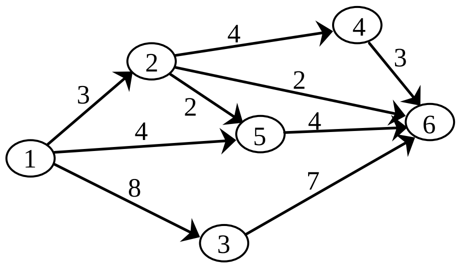
№ 4.4.1.9



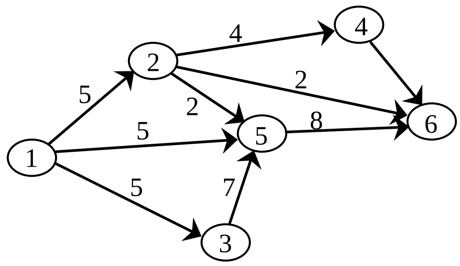
№ 4.4.1.10



№ 4.4.1.11

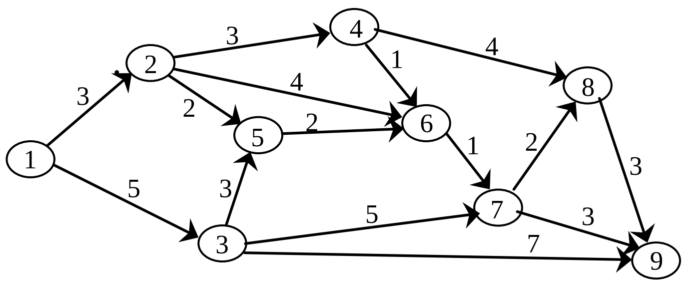


№ 4.4.1.12

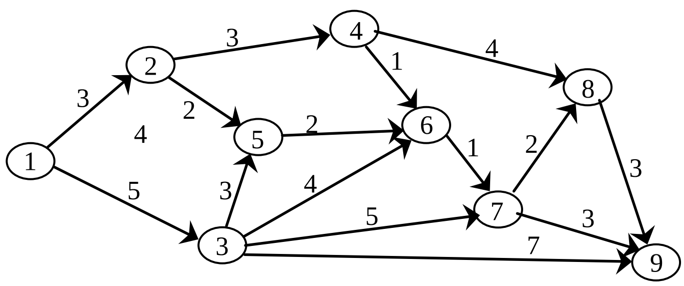


Задача 4.4.2. Пользуясь алгоритмом Фалкерсона, пронумеровать события соответствующего сетевого графика. Вычислить все временные параметры событий и работ. Рассчитать по сетевому графику минимальное время выполнения комплекса работ (критический срок). Выделить на сетевом графике критический путь.

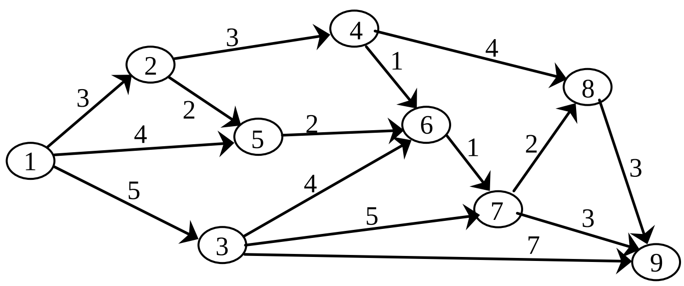
№ 4.4.2.1



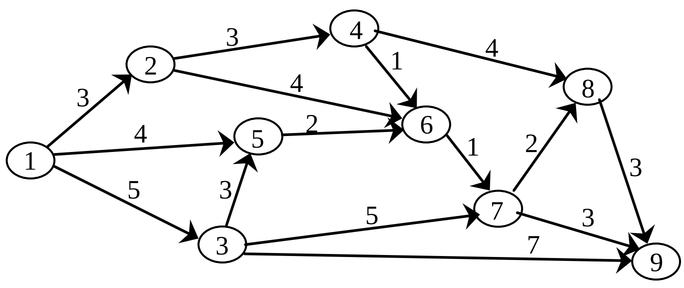
№ 4.4.2.2



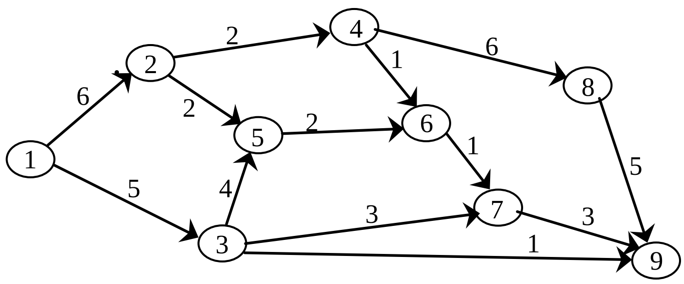
№ 4.4.2.3



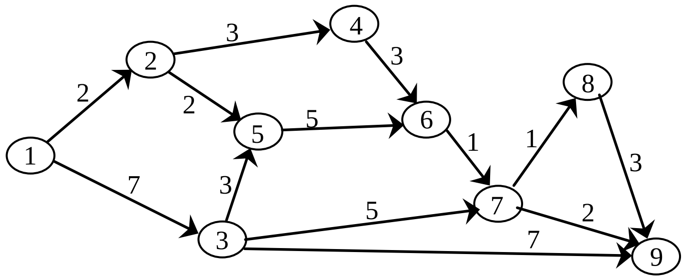
№ 4.4.2.4



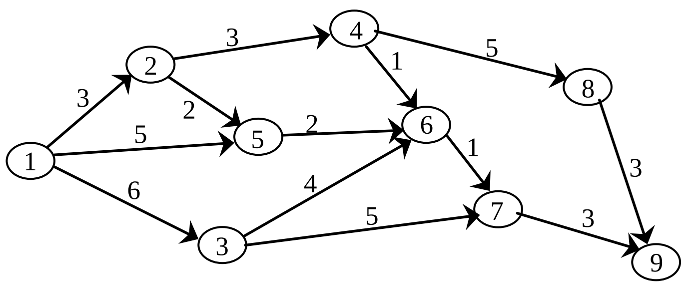
№ 4.4.2.5



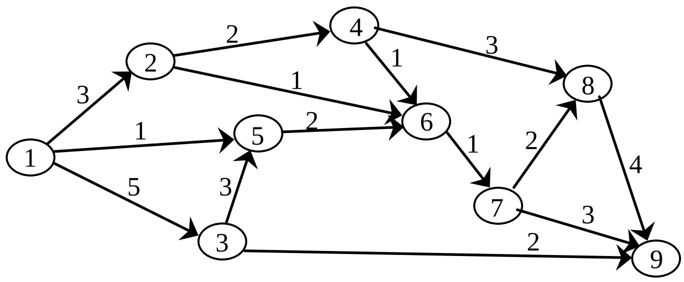
№ 4.4.2.6



№ 4.4.2.7



№ 4.4.2.8



УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Замков, О.О. Математические методы в экономике: Учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ, ДИС, 1997. – 368с.
2. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин и др.; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407с.
3. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 3-е изд., испр. – М.: ДЕЛО, 2002. – 688с.
4. Малыхин, В.И. Математика в экономике: Учебное пособие / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 356с.
5. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Б.М. Рудык, В.И. Ермаков, Р.К. Гринцевичюс и др.; Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 656с.
6. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод и др.; Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова и проф. Р.А. Рутковского. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: Выш. шк., 2002. – 447с.
7. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник / Г.П. Фомин. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544с.
8. Уотшем, Т.Дж. Количественные методы в финансах: Учебное пособие для вузов / Т.Дж. Уотшем, К. Паррамоу; Пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527с.
9. Козинова, А.Т. Математика. Экономико-математические модели: Учебно-методическое пособие / Козинова А.Т. – Н. Новгород: ННГУ, 2002 г. – 61 с.
10. Козинова, А.Т. Практикум по математике. Математическая статистика. Линейное и целочисленное программирование в экономике / Козинова А.Т. – Н. Новгород: ННГУ, 2005 г. – 88с.

Антонина Трифоновна Козинова
Надежда Николаевна Ошарина
Александр Егорович Шахов

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Динамическое программирование.
Теория игр. Системы массового обслуживания.
Модели сетевого планирования в управлении

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ..л. 4,3. Заказ № 798. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603000, Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01