МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет

им. Н.И. Лобачевского»

**Т. Н. Карпычева**

**Элементы высшей математики**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов среднего профессионального обучения, обучающихся по направлению подготовки 19.02.10 «Технология продукции общественного питания», 10.07.01 «Коммерция»

Нижний Новгород

2016 г.

УДК 517

ББК 22.1

Элементы высшей математики: Автор: Карпычева Т.Н.. учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. - 36 с.

Рецензент:

начальник учебно-методического управления

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный

педагогический университет им. К.Минина»,

канд.пед.наук, доцент И.Ф.Фильченкова

Учебно-методическое пособие «Элементы высшей математики» подготовлено для студентов среднего профессионального обучения, обучающихся по специальности 19.02.10 «Технология продукции общественного питания», 10.07.01 «Коммерция». Оно содержит разделы по теории пределов, теории вероятностей, комбинаторики. В пособии представлены теоретические основы и практические задания по каждому разделу, с целью самоподготовки студентов включены вопросы и задания для самоконтроля.

Ответственная за выпуск:

председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, Е.Н. Летягина.

УДК 517

 ББК 22.1

© Нижегородский государственный

университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

**Содержание**

**Введение**

1. **Теория вероятностей**

I.1 Вероятность события

I.2 Сложение вероятностей

I.3. Вероятность противоположного события

I.4. Условная вероятность

I.5. Вероятность произведения независимых событий

I.6. Историческая справка

 I.7. Упражнения

 I.8. Задачи по всем разделам для самостоятельной работы

1. **Элементы комбинаторики**

II.1. Отдельные определения

 II.2. Правила суммы и произведения

II.2.1. Правило суммы.

II.2.2. Правило произведения.

II.3. Биноминальная формула Ньютона

II.4. Историческая cправка

II.5. Упражнения

1. **Пределы**

III.1. Непрерывность функции, их свойства

III.1. Непрерывность функции, их свойства

III.3. Теоремы о пределах.

III.4. Предел функции на бесконечности.

 III.5. Упражнения

**Литература**

**Введение**

Учебно-методическое пособие «Элементы высшей математики» подготовлено для студентов среднего профессионального обучения, обучающихся по специальности 19.02.10 «Технология продукции общественного питания», 10.07.01 «Коммерция».

Его основная цель - подготовка студентов к изучению базовых вузовских математических дис­циплин. Пособие состоит из трех основных разделов.

Изучение материала, представленного в первой главе «Теория вероятностей», позволит познакомиться с логической структурой математического языка, условиями и методами установ­ления истинности математических утверждений, правилами их символической записи.

Изучение материала, представленного во второй главе «Элементы комбинаторики», позволяет овладеть системой исходных понятий, общих для всех математических теорий: множество, отношение, мощность и др., - осмыслить роль этих понятий в математике и ее развитии.

Третья глава «Пределы» посвящена углублению знаний о числовых функциях на основе теоретико-множественных представлений. Ее изучение позволяет познакомить­ся с трактовками понятия функции, которые используются в различных вузовских курсах математики, и причинами их сосуществования.

Все эти разделы являются традиционными для содержания ввод­ных курсов математики в вузе. Весь материал, изложенный в том или ином параграфе, помогает найти ответы на ключевые вопросы, поставленные в его начале. Постановка задач и демон­страция их решения осуществляются в ходе развертывания теории. Задачи выступают средством мотивации к получению новых знаний, играют подводящую роль, иллюстрируют содержание и особенности применения теоретических фактов, выступают основой раскрытия способов и области использования теории.

Необходимая литература - в библиографическом списке. Каждый параграф закан­чивается постановкой заданий для самостоятельной работы. Система­тическое выполнение этих заданий позволит подготовиться к итоговой аттестации.

1. **Теория вероятностей**

**I.1 Вероятность события**

Практикой установлено, что в часто происходящих случайных явлениях существуют определенные закономерности. Задача теории вероятностей – установление и математическое исследование закономерностей массовых случайных явлений.

Рассмотрим эксперименты с подбрасыванием монеты, при которых подсчитывается n – число подбрасываний и f – число выпадений «орла». Число f называется частотой события «выпал орел», а число - относительной частотой этого события. Опыт показывает, что при увеличении числа экспериментов (n) относительная частота появления «орла» все более и более приближается к числу , которое называется вероятностью рассматриваемого события («выпал орел»).

В ряде случаев вероятность события может быть определена и без проведения экспериментов. Познакомимся с различными видами событий, наиболее часто рассматриваемыми в курсе теории вероятностей.

 ●

 ●

● ● ●

 ● ●

● ●

Например, при одном бросании игральной кости возможны следующие события (исходы): на верхней грани может оказаться одно из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6, представленных на кубике точками.

Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может не произойти.

Однако тот факт, что выпадет одно из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6 – достоверное событие, так как при бросании игральной кости оно обязательно произойдет.

Выпадение других чисел при одном бросании, например число 7, является невозможным событием.

Рассмотренные возможные при бросании игральной кости события несовместны (появление одного из них исключает появление другого), единственно возможны (обязательно появится одно число) и равновозможны (у всех чисел шансы появиться одинаковы). Такие события называются элементарными событиями (или элементарными исходами испытания).

События обычно обозначают буквами А, В, С,…

Рассмотрим более сложное событие А – выпадение четного числа очков при одном бросании игральной кости. Событие А наступит, если произойдет одно из элементарных событий: выпадет либо число 2, либо число 4, либо число 6. Эти три элементарных события являются благоприятствующими событию А.

Очевидно, что появление четного числа очков при одном бросании игральной кости имеет больше шансов, чем появление, например, числа 1. Для количественной характеристики возможности наступления события и вводится понятие вероятности события, классическое определение которого будет сейчас сформулировано.

 **Пусть n – число элементарных исходов некоторого события А, m – число благоприятствующих событию А исходов, тогда вероятность события А (обозначается Р(А)) определяется формулой**

 ,

**Задача 1.** Какова вероятность выпадения четного числа очков при одном бросании игральной кости?

Δ Пусть событие А – выпадение четного числа очков. Тогда число благоприятствующих ему исходов m = 3, число всех элементарных исходов n = 6. По формуле находим:

 .

Вероятность достоверного события равна единице, так как в этом случае m = n и = 1. Вероятность невозможного события равна нулю, так как в этом случае m = 0 и =0.

Таким образом, в любом случае

0 ≤ Р(А) ≤ 1.

**Задача 2**. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет «пятерка» или «шестерка».

Δ Событие А – появление «пятерки» или «шестерки». Число событий, благоприятствующих событию А, равно двум, т. е. m = 2. Число всех элементарных событий n = 6, поэтому

**Задача 3**. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

Δ Пусть событие А – сумма очков на двух костях 6.

Благоприятствующими событию А будут следующие выпавшие пары очков: 1 и 5, 2 и 4, 3 и 3, 4 и 2, 5 и 1. Таким образом, m = 5.

В результате бросания двух игральных костей любая из шести граней кости (с соответствующим ей числом очков) может соединиться с любой из шести граней другой кости. Согласно правилу умножения, имеется 6 × 6 = 36 различных элементарных событий в результате бросания двух костей, т.е. n = 36.

Таким образом, искомая вероятность .

**I.2. Сложение вероятностей**

**Суммой событий А и В называют событие А + В, состоящее в появлении либо только события А, либо только события В, либо и события А и события В одновременно.**

Например, если стрелок сделал два выстрела по мишени и А – попадание в мишень при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, то событие А+В – это попадание стрелком по мишени хотя бы при одном выстреле.

Если события А и В – несовместные, то событие А + В состоит в наступлении одного из этих событий. Например, если А – появление одного очка на игральной кости при одном бросании, а В – появление при одном бросании либо одного, либо двух очков. Очевидно, что в данном случае

**Теорема.** Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

Р(А + В) = Р(А) + Р (В).

○ Пусть n – общее число равновозможных элементарных исходов, m1 – число исходов, благоприятствующих событию А, m2 – число исходов, благоприятствующих событию В.

Число исходов, благоприятствующих либо событию А, либо событию В (т.е. событию А + В), равно m1 + m2. Тогда

  = P(A) + P(B).

**Задача.** В ящике лежат 10 шаров: 3 красных, 2 синих и 5 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

Δ Пусть событие А – появление красного шара, В – появление синего шара, тогда А + В – появление цветного шара. Очевидно, что Так как события А и В несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей:

Р(А + В) = Р(А) + Р (В) = =

**I.3. Вероятность противоположного события**

**Событие называется событием, противоположным событию А, если оно происходит, когда не происходит событие А.**

Например, если событие А – выпадание орла при бросании монеты, то противоположным ему событием будет выпадание решки. Противоположными событиями также будут: изъятие из партии деталей стандартной и нестандартной деталей; выпадание 6 очков при бросании игральной кости и выпадание не 6 очков (т.е. выпадание одного, двух, трех, четырех или пяти очков).

Если в некотором испытании из n элементарных событий событию А благоприятствуют m1 событий, а событию благоприятствует m2 событий, то

 m1  + m2 = n.

Так, например, при бросании игральной кости - 6 элементарных событий (n = 6), событию А – «выпало 6 очков» - благоприятствует одно событие (m1 = 1), а событию - «выпало не 6 очков» - благоприятствуют 5 элементарных событий (m2 = 5): 1 + 5 = 6.

**Теорема 1.**  Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

○ Пусть в результате некоторого испытания могут произойти n элементарных событий и пусть событию А благоприятствует m1 элементарных событий, а противоположному ему событию благоприятствуют m2 элементарных событий. Вероятности появления событий А и соответственно равны: P(A) = и P() = , где согласно формуле m1 + m2 = n. Тогда

P(A) + P() = + = = = 1,

т.е. P(A) + P() = 1.

**Задача 1.** Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

Δ Если событие А - попадание в мишень, то, по условию Р(А) = 0,6. Промах – противоположное попаданию событие, и его вероятность:

 P() = 1 - P(A) = 1 – 0,6 = 0,4.

**Задача 2.** В роте из 100 солдат имеют высшее образование. Какова вероятность того, что случайным образом сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?

Δ Пусть событие А – во взводе хотя бы один человек имеет высшее образование, тогда событие - ни один человек во взводе не имеет высшего образования. В данной ситуации проще вычислить Р(), чем Р(А). найдем Р().

Число способов составления взвода в 30 человек из 100 солдат роты равно . Число солдат, не имеющих высшего образования, равно 100 – 2 = 98. Из 98 человек составить взвод из 30 человек можно способами. Вероятность того, что среди отобранных 30 человек нет ни одного с высшим образованием:

P() = = = = = .

Отсюда находим

P(A) = 1 – P() = 1 - = = 0, 512.

**I.4. Условная вероятность**

**Произведением событий А и В называется событие АВ, состоящее в появлении и события А и события В.**

Например, если событие А – попадание в мишень при первом выстреле, а событие В – попадание в мишень при втором выстреле, то событие АВ – попадание в мишень при обоих выстрелах. Если А – событие, состоящее в том, что из колоды карт наудачу вынимается карта красной масти, а событие В – вынимается туз, то событие АВ – из колоды карт вынут туз красной масти.

При совместном рассматривании двух случайных событий возникает вопрос о влиянии наступления одного события на появление другого.

Пусть, например, один раз бросается игральная кость. Событие А- выпадание нечетного числа очков (1, 3 или 5), событие В – выпадание числа очков, меньшего четырех (т.е. 1, 2 или 3). Если считать, что наступило событие в (три элементарных исхода), то в нем событию А благоприятствуют два элементарных исхода (1 и 3). Тогда вероятность появления события А при условии наступления события В равна Если бы не было известно о наступлении события В, то вероятность наступления события А была бы равна . Так как ˃ , то следует признать, что наступление события В увеличивает вероятность наступления события А.

Для количественной характеристики зависимости одного события от другого вводится понятие условной вероятности.

**Если А и В – два случайных события, которые могут произойти в одном испытании, причем Р(В) ≠ 0, то число называется условной вероятностью события А при условии, что наступило событие В, или просто условной вероятностью события А.**

Вероятность события А при условии наступления события В обозначается Р(А/В). Таким образом, согласно определению

Р(А/В) = .

**Задача 1.** Какова вероятность того, что наугад вынутая из полного набора кость домино окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости меньше, чем 5?

Δ В наборе домино 28 костей, из них 7 «дублей». На девяти костях сумма очков меньше, чем 5 (0 – 0, 0 – 1, 0 – 2, 0 – 3, 0 – 4, 1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 2 - 2).

Пусть событие В – сумма очков на вынутой кости – меньше пяти, а событие А – вынутая кость есть «дубль», тогда событие АВ – на вынутой кости, являющейся «дублем», сумма очков меньше пяти (таких костей три: 0 – 0, 1 – 1, 2 - 2).

Р(А/В) = = = .

Значение Р(А/В) можно было найти и при использовании классического определения вероятности: из тех 9 случаев, к которым сводится событие В, событию А благоприятствуют три: = .

**Задача 2.** В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика 2 раза вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что : 1) первым был извлечен белый шар, а вторым – черный; 2) вторым был вынут черный шар при условии, что первым уже был извлечен белый.

Δ При решении задачи рассмотрим события:

А – первым вынут белый шар;

В – вторым вынут черный шар;

АВ – последовательно извлечены белый, затем черный шары;

В/А – вторым вынут черный шар при условии, что первым был извлечен белый.

1. Число всех возможных вариантов извлечения двух шаров из ящика с пятью шарами (с учетом порядка их появления) равно = 5 × 4 = 20. Благоприятствующими событию АВ будут все возможные упорядоченные пары белый шар, черный шар, составленные из имеющихся трех белых и двух черных шаров. Таких соединений, согласно правилу умножения, будет 3 × 2 = 6 (m = 6). Таким образом, Р(АВ) = = .
2. После извлечения из ящика первым белого шара (произошло событие А) там останутся 2 белых и 2 черных шара. Появлению черного шара вторым из четырех оставшихся (n = 4) благоприятствуют два события (m = 2), поэтому

Р(В/А) = = .

Значение Р(В/А) можно получить и по формуле

Р(В/А) = .

Действительно, Р(А) = , так как n = 5 (в ящике первоначально находилось 5 шаров) и m = 3 (белых было 3). Подставив в формулу

Р(АВ) = и Р(А) = , получим

Р(В/А) = = = .

Записывается теорема умножения:

Р(АВ) = Р(А/В) × Р(В) = Р(В/А) × Р(А),

так как события АВ и ВА – одно и то же событие.

**I.5. Вероятность произведения независимых событий**

**Событие А не зависит от события В, если Р(А/В) = Р(А) (1)**

Иначе говоря, А не зависит от В, если наступление события В не оказывает влияния на вероятность события А.

Понятие независимости событий – одно из основных в теории вероятностей.

Если событие А не зависит от события В, то

Р(АВ) = Р(А) · Р(В). (2)

Известно, что

Р(АВ) = Р(А/В) · Р(В).

Так как А не зависит от В, то согласно формуле (1), Р(А/В) можно заменить на Р(А). это и приведет к формуле (2).

Обычно независимость событий А и В и понимают как выполнение равенства (2).

**Задача 1.** Найти вероятность того, что при первом бросании игральной кости появится 6 очков, а при втором – нечетное число очков.

Δ Событие А - появление 6 очков при первом бросании кости, событие В – появление четного числа очков при втором бросании – неизвестные события. Учитывая, что Р(А) = , Р(В) = , по формуле (2 ) найдем Р(АВ):

Р(АВ) = · = .

**Задача 2.** В изготовленной партии детских мячей вероятность появления бракованного мяча равна 0,004. В красный цвет окрашены всех мячей, а остальные – в синий. Какова вероятность того, что наугад вынутый мяч будет небракованным и красным?

Δ Пусть событие А – появление бракованного мяча. По условию Р(А) = 0,004. Появление небракованного мяча – событие и

Р() = 1- 0,004 = 0, 996.

Пусть В – появление красного мяча, тогда, согласно условию, Р(В) = .

Задача сводится к нахождению вероятности совместного появления независимых событий и В, т.е. к нахождению вероятности событий В. Согласно формуле (2) имеем

Р(В) = Р() · Р(В) = 0,996 · = 0,747.

**I.6. Историческая справка**

Теория вероятностей как наука зародилась в XVII в. из потребностей страхового дела, демографии и в связи с запросами распространившихся в Европе азартных игр. В азартных играх (картах, домино, костях и пр.) выигрыш в основном зависел не от искусств игрока, а от случайности. Слово «азарт» и произошло от французского слова hazard, означающего «случай», «риск». Богатые люди, увлеченные азартными играми, порой прибегали к помощи математиков для решения проблем, возникающих во время игры. В связи с этим рождением теории вероятностей многие ученые считают 1654 г., в котором происходила переписка двух великих французских ученых Б. Паскаля и П. Ферма в связи с решением задачи, возникающей при игре в кости.

Ученые XVII в. начали использовать азартные игры как удобные и наглядные модели для исследования понятия теории вероятностей. Первая книга по теории вероятностей называлась «О расчетах в азартной игре» и была опубликована в 1657 г. Ее автор, голландский ученый Х. Гюйгенс, писал: «…при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы теории вероятностей глубокой и весьма интересной».

В 1713 г. была опубликована книга известного швейцарского математика Я. Бернулли «Искусство предположений», в которой автор изложил основы комбинаторики и аппарата вычисления вероятностей, а также доказал одну из замечательных теорем теории вероятностей, названную впоследствии теоремой Бернулли. На доказательство этой теоремы ученый потратил 20 лет жизни, а само доказательство заняло 12 страниц текста. Эта теорема – важный частный случай одного из основных законов теории вероятностей – «закона больших чисел», открытого в середине XIX в. русским ученым П.Л.Чебышевым. закон больших чисел имеет широкое практическое применение в вопросах, связанных с определением вероятностей событий, для которых рассчитать точное значение вероятности (в ее классическом понимании) невозможно.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с работами французского математика П.Лапласа (1749 - 1827), немецкого математика К.Гаусса, российских математиков А.А.Маркова (1856 - 1920), А.М.Ляпунова (1857 - 1918) и др. Значительный вклад в теорию вероятностей внесли отечественные ученые нашего времени А.Н.Колмогоров (1903 - 1987), А. Я. Хинчин (1894 - 1959), В.В.Гнеденко (1912 - 1996) и др.

В настоящее время теория вероятностей продолжает развиваться и находит широкое применение в естествознании, экономике, в производстве и гуманитарных науках.

**I.7. Упражнения**

**1.** Набирая номер телефона, забыли последнюю цифру, ее набирают наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

**2.** В словаре языка А.С.Пушкина 22000 слов, из которых 16000 А.С.Пушкин в своих произведениях употреблял только по одному разу. Какова вероятность того, что наудачу взятое слово использовалось поэтом более одного раза?

**3.**Трехзначное число образовано наугад выбранными неповторяющимися цифрами из числа цифр 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность того, что это число четное?

**4.** Какова вероятность выпадания числа, кратного 3, в результате подбрасывания игральной кости?

**5.** Какова вероятность того, что на открытом наугад листе нового отрывного календаря на високосный год окажется 5-е число?

**6.** Допустим, вы забыли последнюю цифру номера телефона друга и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что вы ее верно набрали?

**7**. В коробке находится 3 черных, 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) черный; 2) белый; 3) красный; 4) черный или белый; 5) черный или красный, 6) красный или белый; 7) черный, или белый, или красный; 8) зеленый?

**8.** Брошены 3 игральные кости.Какова вероятность того, что:

1) на всех трех костях выпало одинаковое количество очков;

2) сумма очков на всех костях равна 4;

3) сумма очков на всех костях равна 5?

**9.** В лотерее участвует 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что:

1) оба вынутых билета выигрышные;

2) только один выигрышный;

3) выигрышных билетов не оказалось?

**10.** Выяснить, являются ли события А и В несовместными, если:

1) А – появление туза, В – появление дамы при одном изъятии карты из колоды карт;

2) А – появление туза, В – появление карты бубновой масти при одном изъятии карты из колоды карт;

3) А – выпадение четырех очков, В – выпадение четного числа очков при одном бросании игральной кости;

4) А – выпадение четырех очков, В – выпадение нечетного числа очков при одном бросании игральной кости;

**11.** В пачке находится 12 билетов денежно-вещевой лотереи, 16 билетов спортивной лотереи и 20 билетов художественной лотереи. Какова вероятность того, что один наудачу вытянутый билет будет билетом либо денежно-вещевой, либо художественной лотереи?

**12.** В колоде 36 карт. Наугад вынимается одна карта. Какова вероятность, что эта карта либо туз, либо дама?

**13.** Что является событием, противоположным событию:

1) сегодня первый урок – физика;

2) экзамен сдан на «отлично»;

3) на игральной кости выпало меньше 5 очков;

4) хотя бы одна пуля при трех выстрелах попала в цель?

**14.** Вероятность выигрыша главного приза равна . Какова вероятность не выиграть главный приз?

**15.**  Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино (28 костей) одна кость домино не будет «дублем».

**16.**  В ящике лежат 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар не будет белым? (Решить задачу двумя способами)

**17.**  На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно их не кладет. Найти вероятность того, что:

1) вторым был взят красный карандаш при условии, что первым был синий;

2) вторым взят синий карандаш при условии, что первым оказался синий;

3) вторым взят синий карандаш при условии, что первым был красный;

4) вторым взят красный карандаш при условии, что первым также оказался красный карандаш.

**18.** В барабане находится 10 лотерейных билетов, из них 2 выигрышных. Из барабана 2 раза вынимают по одному билету, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что:

1) второй раз был извлечен билет без выигрыша при условии, что первым оказался выигрышный билет;

2) первый раз был вынут выигрышный билет, а во второй раз – билет без выигрыша?

**19.** Из ящика, содержащего 4 белых и 5 красных шаров, 2 раза наугад извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

1) вторым извлечен красный шар при условии, что первым также оказался красный шар;

2) оба раза извлекались красные шары.

**20.** Из колоды в 36 карт последовательно наугад вынимаются и не возвращаются 2 карты. Какова вероятность того, что

1) оба раза вынимаются карты красной масти;

2) первый раз вынута карта красной масти, а второй – черной масти;

3) второй вынута карта черной масти при условии, что первой была карта красной масти?

**21.** В урне находится 10 белых и 10 черных шаров. Из них последовательно вынимаются 2 шара и не возвращаются обратно. Какова вероятность того, что:

1) оба раза извлекались шары черного цвета;

2) первым вынут белый шар, а вторым – черный;

3) вторым извлечен черный шар при условии, что первым был вынут белый шар?

**22.** В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам последовательно наугад выбираются 2 человека для делегирования на профсоюзную конференцию. Какова вероятность того, что:

1) выбранными окажутся две женщины;

2) выбранными окажутся двое мужчин;

3) первым выбран мужчина,, а второй – женщина;

4) вторым выбран мужчина при условии, что первым также был мужчина?

**23.** Ученик, идя на экзамен, знал ответы на 25 билетов из 30, предлагаемых экзаменатором. На первый билет ученик не знал ответа и, не возвращая его экзаменатору, вытянул второй билет. Какова вероятность того, что:

1) вторым ему достался билет, на который он знал ответ;

2) вторым ему достался билет, на который он не знал ответа?

**24.** Студент, которому предстояло сдавать зачет, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что он:

1) верно ответит на два вопроса;

2) ответит на второй вопрос при условии, что он не знал ответа на первый вопрос?

**25.** Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на обеих костях появятся по два очка?

**26.** Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпадет четное число очков, а на второй – нечетное?

**27.** Вероятность попадания в мишень равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок попадет по мишени в каждом из двух последовательных выстрелов?

**28.** Вероятность поражения цели из первого орудия равна 0,7, а из второго – 0,6. Найти вероятность поражения цели из обоих орудий, выстреливших одновременно.

**29.** В урне лежат 2 белых, 3 красных и 5 черных шаров. Дважды вынимают по одному шару и возвращают их обратно в урну. Какова вероятность того, что:

1) первым вынут красный шар, а вторым – черный;

2) первым вынут черный шар, а вторым – белый?

**30.** Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадает либо пять, либо шесть очков?

**31.** Из урны, содержащей 15 белых, 10 красных и 5 синих шаров наугад извлекается один шар. Какова вероятность появления белого шара?

**32.** Одновременно бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8?

**33.** Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадут три очка?

**34.** Брошены монета и игральная кость. Какова вероятность того, что появится «герб» и появятся 6 очков?

**35.** По мишени стреляют два раза. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,8, при втором выстреле – 0,9. Какова вероятность того, что мишень не будет поражена ни одним выстрелом?

**36.** Из колоды в 36 карт последовательно наугад вынимаются 2 карты и не возвращаются обратно. Найти вероятность того, что:

1) вынуты два туза;

2) сначала извлечен туз, а затем дама;

3) вынуты две карты бубновой масти;

4) вторым извлечен туз при условии, что первой была вынута дама.

**37.** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что 3 очка появятся хотя бы на одной из костей.

**38.** Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

**39.** Бросают 2 монеты. Какова вероятность того, что на обеих монетах выпадет «орел»?

**40.** Вероятность попадания в партии бракованной детали равна 0,05. Какова вероятность того, что наугад извлеченная деталь окажется не бракованной?

**41.** В ящике лежат 2 черных, 3 белых и 10 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый один шар окажется или черного, или белого цвета?

**42.** В вазе лежат три апельсина и 5 яблок. Мальчик не глядя берет из вазы один плод, затем, не возвращая его, берет второй. Найти вероятность того, что первым был взят апельсин, а вторым – яблоко.

**43.** Вероятность попадания в мишень равна 0,8. Какова вероятность попадания для стрелка по мишени в каждом из двух произведенных выстрелах?

**44.** Ученик знал ответы на 15 вопросов из 20, которые предлагались к зачету. Ответа на первый попавшийся на зачете вопрос он не знал. Какова вероятность того, что ученик ответит на второй из предложенных ему вопросов?

**45.** Вероятность попадания по мишени для стрелка равна 0,9. Какова вероятность того, что после двух выстрелов в мишени окажется одна пуля?

**I.8. Задачи по всем разделам для самостоятельной работы**

Задача 1. Номер серии выигрышного билета вещевой лотереи состоит из пяти цифр. Определить вероятность того, что номер первой выигрышной серии будет состоять из одних нечетных цифр.

Задача 2. В урне 11 шаров, из которых 4 цветных и 7 белых. Найти вероятность двукратного извлечения из урны цветного шара, если:

а) вынутый из урны шар возвращается обратно в урну;

б) вынутый шар в сосуд не возвращается.

Задача 3. Десять различных книг расставляют произвольно на полке. Какая вероятность того, что:

а) три определенных книги окажутся рядом;

три определенных книги окажутся впереди ряда книг?

Задача 4. Какова вероятность того, что из десяти человек, садящихся на десять мест за круглый стол произвольно, двое друзей окажутся рядом?

Задача 5. Имеются карточки с буквами слова «АБРАКАДАБРА». Наудачу по одной берут 4 карточки и выкладывают их в ряд в порядке выбора. Какова вероятность того, что получится слово «АРКА», слово «БРАК»?

Задача 6. На книжной полке в случайном порядке стоит энциклопедический справочник, состоящий из 5 томов. Какова вероятность того, что хотя бы один из томов этого справочника стоит не на своем месте?

Задача 7. Пассажир ждет автобуса одного из двух маршрутов, причем через эту остановку проходит еще 4 маршрута. Считают, что автобусы всех маршрутов приходят в среднем одинаково часто. Найти вероятность того, что пассажир сможет уехать первым подошедшим автобусом по нужному маршруту.

Задача 8. Игральный кубик подбрасывают три раза. Какова вероятность, что при первом подбрасывании выпадет четное число очков, при втором – 5 очков, при третьем – число очков, кратное трем?

Задача 9. Вероятность брака из-за нарушения режима обработки деталей равна 0,02, а вследствие неисправности станка – 0,08. Какова вероятность выпуска бракованных деталей?

Задача 10. В урне 6 черных, 5 красных, 4 белых шара. Последовательно вынимают три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным, третий – белый?

Задача 11. Для того, чтобы сдать коллоквиум, студент должен ответить на два из трех вопросов, предлагаемых преподавателем. Студент не знает ответов на восемь вопросов из сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

Задача 12. Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы в течение смены для первого станка равна 0,9, для второго станка – 0,8, для третьего станка – 0,.7.

Найти вероятность того, что за смену потребует вмешательства:

а) лишь один станок,

б) хотя бы один станок.

Задача 13. В мешке смешаны нити 3-х цветов: белых - 50красных - 30, черных - 20. Определить вероятность того, что при последовательном вытягивании наугад трех нитей окажутся:

а) все нити одного цвета,

б) все нити разных цветов.

1. **Элементы комбинаторики**

**II.1. Отдельные определения**

Произведение 1 · 2 · 3 · 4 · (n - 1) · n обозначается n! (Читается эн факториал).

1. Группы, составленные из предметов какой-либо природы, называются соединениями. Предметы, из которых составлены соединения, называются элементами. Ниже рассмотрены основные типы соединений.
2. Перестановками из k элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит все k элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения. Общее число перестановок из k элементов обозначается и вычисляется по формуле:

 = k! (1)

Задача 1. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?

Δ По формуле (1) находим

 = 12! = 1 · 2 · 3 · …· 11 · 12 =479001600.

1. Сочетаниями из k элементов по l в каждом называются такие соединения, каждое из которых содержит l элементов, взятых из числа данных k элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Общее число сочетаний из k элементов по l в каждом обозначается и вычисляются по формуле:

= .

Задача 2. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?

Δ Выбор двух карт из колоды без учета порядка их расположения является сочетанием. Находим:

 = = = 18 · 35 = 630.

1. Размещениями из k элементов по l в каждом называются такие соединения, каждое из которых содержит l элементов, взятых из числа данных k элементов, и которые отличаются друг от друга или хотя бы одним элементом, или порядком их расположения. Общее число размещений их k элементов по l в каждом обозначаются и вычисляются по формуле:

 = .

**II.2. Правила суммы и произведения**

**II.2.1. Правило суммы.** Пусть А = {}, B = {, … } – конечные множества и А В. Тогда, как мы знаем,

m (AB) = m(A) + m(B) = k + r.

В комбинаторике данное соотношение называется **правилом суммы** и читается следующим образом:

**«Если объект x можно выбрать k различными способами, а объект y другими r различными способами, то выбор какого-нибудь одного из этих объектов (x или y) можно осуществить (k + r) способами».**

Пример. На столе лежит 5 книг и 7 тетрадей. Сколькими способами можно выбрать один предмет: книгу или тетрадь? По правилу суммы получаем, что один предмет можно выбрать 5 + 7 = 12 способами.

Правило суммы обобщается на случай нескольких попарно непересекающихся множеств. Пусть ,… попарно не пересекаются и содержат , ,,, элементов соответственно. Тогда выбор одного элемента из них можно осуществить + + ,,, + способами.

**II.2.2. Правило произведения.** Пусть A{}, B{, ,,, } – конечные множества

и A× B = {(x, y) | x ͼ A, y ͼ B} – их декартово произведение. Как мы знаем,

m (A × B) = m(A) · m(B) = k · r/

В комбинаторике данное соотношение называется **правилом произведения** и читается следующим образом:

**«Если объект x можно выбрать k способами и после каждого из этих выборов объект y можно выбрать r способами, то упорядоченную пару (x, y) можно выбрать k · r способами».**

Правило произведения также обобщается на случай нескольких множеств. Пусть множество ,… содержат , ,, , элементов соответственно, то есть элемент ͼ можно выбрать способами, ͼ - способами, … ͼ способами. Тогда кортеж ( , …, ) можно выбрать , ,,, , способами.

Пример. Сколько существует четырехзначных чисел с разными цифрами?

Четырехзначное число – *это кортеж*  длины четыре, составленный из цифр 0, 1, 2, … ,9. Первую цифру можно выбрать 9 способами, так как число не может начинаться с нуля. Вторую цифру можно выбрать тоже 9 способами (одна уже выбрана, а цифры по условию различны). Третью цифру можно выбрать 8 способами, а четвертую 7 способами (три уже выбраны). По правилу произведения все цифры можно выбрать 9 · 9 · 8 · 7 = 4536 способами, то есть нужных чисел 4536 штук.

**II.3. Биноминальная формула Ньютона**

Нам уже знакомы формулы квадрата и куба суммы:

 = ,

 = + 3b + + .

Теперь познакомимся с формулой n-й степени двучлена (a+b) (или бинома a+b). Последовательно запишем формулы степени бинома:

 = 1;

 = 1 · a + 1· b;

 = ;

 = + 3b + + ;

b +6;

Можно показать, что коэффициенты разложения степени бинома можно найти по следующей схеме, которая называется треугольником Паскаля:

 1

 1 1

 1 2 1

 1 3 3 1

 1 4 6 4 1

 1 5 10 10 5 1

 1 6 15 20 15 6 1

 1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

В каждой строке этой схемы коэффициенты разложения степени бинома, кроме первого и последнего, получаются попарным сложением коэффициентов предыдущей строки. Например, шестая строка получается так:

1, 5=1+4, 10 = 4+6, 10 = 6+4, 5 = 4+1, 1.

Напомним, что и, кроме того, полагают .

В основе построения треугольника Паскаля лежит свойство сочетаний

,

Поэтому коэффициенты разложения степени бинома также можно записать с помощью числа сочетаний:

,

=+,

,

+.

Вообще справедлива следующая биноминальная формула Ньютона:

. (1)

Формулу (1) часто для краткости называют бином Ньютона, и числа - биноминальными коэффициентами.

Заметим, что в разложении (1) степени числа a убывают от m до 0, степени числа b возрастают от 0 до m и биноминальные коэффициенты, равноотстоящие от начала и конца разложения равны, так как .

Задача 1. Найти разложение бинома:

1. , 2) .

Δ По формуле (1) находим:

1. +1= =32+,
2. +15.

**II.4. Историческая cправка**

Задачи, связанные с возможным выбором и упорядочением определенных объектов, приходилось решать во многих сферах человеческой деятельности. С такими задачами, получившими название «комбинаторных», люди сталкивались еще в древности. Так, в Древнем Китае не только математики, но и простые люди увлекались составлением магических квадратов (заданные числа надо было расположить так, чтобы их суммы по горизонталям, вертикалям и главным диагоналям были одинаковые). В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел, а также составлением различных фигур из частей специальным способом разрезанного квадрата. В разных странах решались комбинаторные задачи, связанные с такими играми, как шахматы, шашки, карты, кости и т.п.

Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Тарталье (ок. 1499 - 1537), Г. Галилею (1564 = 1642) и французским ученым Б. Паскалю (1623 - 1662) и П. Фериа. Комбинаторика как наука стала развиваться в XVIII в. параллельно с возникновением теории вероятности, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитывать число разных комбинаций элементов.

Комбинаторику как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666 г. Ему также принадлежит и введение самого термина «комбинаторика». Значительный вклад в развитие комбинаторики внес Л. Эйлер.

В современном обществе с развитием вычислительной техники комбинаторика добилась новых успехов. Так, с помощью ЭВМ была решена комбинаторная задача, известная под названием проблема четырех красок. Удалось доказать, что любую карту можно раскрасить в 4 цвета таким образом, что никакие две страны, имеющие общую границу, не будут окрашены в один и тот же цвет.

**II.5. Упражнения**

1. Сколько разных трехзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр:
2. 1, 2 и 3;
3. 1, 2, 3 и 4?
4. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр:
5. 6, 7 и 8;
6. 6, 7, 8 и 9?
7. Сколько разных двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2, 3 и 4?
8. Путешественник может попасть из пункта А в пункт С, проехав через пункт В. Между пунктами А и В имеются три автодороги, а между В и С - железнодорожное и речное сообщение. Сколько существует различных маршрутов между пунктами А и С?
9. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали по итогам первенства страны по футболу, если число участвующих в первенстве команд равно 16?
10. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день из шести разных учебных предметов?
11. Чему равно: 1) ; 2) ; 3) ; 4) ?
12. Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырех стульях в столовой детского сада?
13. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди учащихся группы в течении 7 дней?
14. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы: 1) последней была цифра 4: 2) первой была цифра 2, а второй – цифра 3; 3) первыми были цифры 2 и 3, расположенные в любом порядке?
15. Упростить форму записи следующих выражений (k – натуральное число, k):
16. 7! · 8;
17. 16 · 15!;
18. 12! · 13· 14;
19. k! (k + 1);
20. (k-1)! k;
21. (k-1)! k (k+1);
22. (k-2)! (k-1) k;
23. (k-5)! ( - 7k + 12).
24. Упростить:
25. **;** 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) ; 8) .

если буквами k, m, n обозначаются натуральные числа.

1. Решить уравнение относительно n:
2. = ;
3. /
4. Вычислить:
5. ; 2) ; 3) ; 4) ;

 ; 6) ; 7) ; 8) .

1. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных предметов?

1. Сколько существует способов для обозначения вершин данного четырехугольника с помощью букв A, B, C, D, E, F?
2. В классе 30 чел. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

1. В чемпионате по фигурному катанию участвуют 10 команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?
2. Найти значение выражения:
3. ; 2) .

1. Решить уравнение относительно m:
2. =156,
3. .
4. Найти:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) ; 6) ;

7) ; 8) ; 9) ; 10) ; 11) ; 12) .

1. Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?
2. Сколько различных аккордов, содержащих три звука, можно взять на 13 клавишах одной октавы?
3. В помещении 20 ламп. Сколько существует разных вариантов освещения, при котором должны светиться только 18 ламп?
4. Имеется 15 точек на плоскости, причем никакие три из них не лежат на одной плоскости. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?
5. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1. Записать разложение бинома:
2. ; 2) ; 3) ;

; 5) ; 6) .

1. Вычислить :
2. ; 2) .
3. Упростить;
4. , 2) () n! .

1. Найти разложение бинома:
2. , 2) , 3) , 4) ,
3. Найти разложение степени бинома:
4. , 2) , 3) , 4) .
5. Найти :
6. , 2) , 3) , 4) .
7. Упростить:
8. , 2) .
9. Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 8 различных предметов?
10. В одном классе изучаются 10 разных предметов. В пятницу завуч должен поставить в расписание этого класса 4 разных предмета. Сколькими способами он сможет это сделать?
11. Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в шести классных комнатах (по одной группе в комнате)?
12. Сколько существует трехзначных цифровых кодов, в которых нет одинаковых цифр?
13. Записать разложение бинома:
14. , 2) .

1. **Пределы**

**III.1. Непрерывность функции, их свойства**

Число А называют пределом функции y = f (x) при x, стремящемся к (пишут ), если для любого положительного числа ɛ можно указать такую окрестность точки , т.е. интервал, содержащий точку , что для всех x ≠ из этой окрестности выполняется неравенство

|f (x) - A|

**iii.2. Теорема о единственности предела**

Теорема. Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть в точке функция f (x) имеет два различных предела А и В.

Согласно определению предела, для любой последовательности значений аргумента , n Є N, такой, что и , имеем

 .

В силу единственности предела последовательности отсюда получаем равенство А = В, которое противоречит предположению. Следовательно, функция не может иметь двух разных пределов в точке. Теорема доказана.

**III.3. Теоремы о пределах.**

Основные теоремы о пределах функций (о пределе суммы, произведения и частного), облегчающие вычисление пределов, аналогичны соответствующим теоремам о пределах последовательностей.

**Теорема 1.** Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют:

.

**Теорема 2**. Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют:

.

**Следствие.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

,

если существует.

**Теорема 3.** Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:

 ,

если .

**Теорема 4.**  Если

,

и в некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки а, выполняется неравенство

φ (x) , то

Эта теорема следует из соответствующей теоремы для последовательностей.

**Теорема 5.** Если функция f(x) имеет предел в точке x = a и f(x) для всех x из некоторой окрестности точки x = a, то

.

Эта теорема является следствием соответствующего утверждения для последовательностей.

Пример 1. Найти .

Решение . Применив теоремы о пределах суммы, разности и произведения, получим

 = ) - .+ .=

= 9 - 6 + 8 = 9 ( ( - 6 · 1 + 8 =

= 9 · 1 · 1 – 6 · 1 + 8 = 11.

Пример 2. Найти : .

Решение: здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя. Разложим числитель на множители:

Так как при нахождении предела в точке 2 рассматриваются лишь x, то можно сократить на (x-2), и поэтому

( = ( = ( = 2 – 3 = -1.

**III.4. Предел функции на бесконечности.**

Число А называют пределом функции y = f(x) при x, стремящемся к + и пишут

,

если для любого положительного числа ɛ можно указать такой промежуток | M; +| , что для всех x из этого неравенства |f(x) - A| .

Число А называют пределом функции y = f(x) при x и пишут

,

если .

Если и одновременно, то число А называют пределом функции при x, стремящемся к , и пишут

.

Для этих пределов сохраняются все вышеприведенные свойства предела функции в точке.

Пример 1. Найти предел .

Решение. = =

= = 5.

**III.5. Упражнения**

1. Вычислить:
2. , 2) (),
3. (x + 1), 4) (,
4. , 6) ,
5. , 8) ,
6. , 10) ,

 , 12) ,

, 14) .

15) , 16) ,

17) , 18) .

1. Вычислить:
2. . 2) ,

3), 4)

5), 6) ,

7), 8)

.

1. Найти следующие пределы:
2. ,
3. ,
4. ,
5. ,
6. ,
7. ,
8. ,
9. ,
10. ,
11. ,
12. ,
13. ,
14. ,
15. ,
16. ,
17. ,
18. ,
19. ,
20. ,
21. ,
22. ,
23. Найдите пределы:
24. ,
25. ,
26. ,
27. ,
28. ,
29. ,
30. ,
31. ,
32. ,
33. ,
34. ,
35. .

**Литература**

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. 1997.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М. 1997.
3. Кудрявцев В.А. , Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М. 1999.
4. Маркович Э.С. Курс высшей математики. – М. 2001.
5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч.П. – М. 1992.
6. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М. Просвещение. 2001.
7. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. – М. Наука. 1999.
8. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – М. Наука. 1997.
9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М. Наука. 1997.
10. Каченовский М.И. и др. Алгебра и начала анализа / Под ред. Г.И. Яковлева. – М. Наука. 1991.
11. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы./ В.М. Жуков. – Ростов н/Д: Феникс, 2012.